Dans tout le chapitre, E désigne un espace préhilbertien (réel ou complexe). On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dont il est muni et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne (resp. hermitienne) associée.

Définition 1. *Soient $x, y \in E$. On dit que les vecteurs x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.*

Proposition 1 (Identité de Pythagore)**.**

1. *Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$. On a :*

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2. *Soient E un espace préhilbertien complexe et $x, y \in E$. On a :*

$$x \perp y \quad \Rightarrow \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Définition 2. *On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est orthogonale si elle constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux, i.e.*

$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

On dit que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormée si elle est orthogonale et ses vecteurs sont de plus normés (i.e. pour tout $i \in I$, $\|e_i\| = 1$), ce qui équivaut à

$$\forall i, j \in I, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Proposition 2. *Toute famille $(e_i)_{i \in I}$ orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.*

Définition 3. *Soit E un espace euclidien ou hermitien. On appelle base orthonormée de E toute famille de vecteurs de E qui est à la fois une base de E et une famille orthonormée.*

Proposition 3. *Soient E un espace euclidien ou hermitien et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ dont données par :*

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad x_k = \langle e_k, x \rangle$$

de sorte que $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle \, e_k$.

Proposition 4. *Soit E un espace euclidien ou hermitien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soient $x, y \in E$ de coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$ notées $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$, alors*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k = {}^t\overline{X}Y \qquad \textit{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = {}^t\overline{X}X$$

où l'on a noté $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

Théorème 1. *Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe). Pour toute famille $(u_1, \dots, u_n)$* ***libre*** *de E, il existe une famille $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée de E vérifiant*

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Corollaire 1. *Tout espace euclidien ou hermitien E admet une base orthonormée.*

Corollaire 2. *Toute famille orthonormée d'un espace euclidien ou hermitien E peut être complétée en une base orthonormée de E.*

Définition 4. *Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de la partie A l'ensemble, noté $A^\perp$, constitué des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A :*

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \quad \langle a, x \rangle = 0\}.$$

Proposition 5. *Pour toute partie $A \subset E$, l'orthogonal $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 6. *Soient $A, B \subset E$, alors :*

1. $A \subset (A^\perp)^\perp$,
2. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ *(inversion de l'inclusion),*
3. $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Proposition 7. *Soit $F = \mathrm{Vect}(e_k)_{k \in I}$ un sous-espace vectoriel de E (la famille $(e_k)_{k \in I}$ est une famille génératrice de F). Alors*

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall k \in I, \quad \langle e_k, x \rangle = 0\}.$$

Définition 5. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux si pour tout vecteur $x \in F$ et tout vecteur $y \in G$, $\langle x, y \rangle = 0$.*

Théorème 2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de* **dimension finie**, *alors $E = F \oplus F^{\perp}$. On dit que $F^{\perp}$ est le supplémentaire orthogonal de F.*

En particulier, si E est un espace euclidien ou hermitien, pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $E = F \oplus F^{\perp}$.

Corollaire 3. *Si E est un espace euclidien ou hermitien, pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a*

$$\dim(F^{\perp}) = \dim E - \dim F \quad \text{et} \quad (F^{\perp})^{\perp} = F.$$

Proposition 8. *Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus F^{\perp}$, alors $(F^{\perp})^{\perp} = F$.*

Définition 6. *On appelle projection sur F parallèlement à G l'endomorphisme p de E défini par*

$$\forall x = x_F + x_G \in E \text{ avec } (x_F, x_G) \in F \times G, \quad p(x) = x_F.$$

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E défini par

$$\forall x = x_F + x_G \in E \text{ avec } (x_F, x_G) \in F \times G, \quad s(x) = x_F - x_G.$$

On a alors $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Proposition 9. *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :*

(i). *$p^2 = p$ (où $p^2 = p \circ p$),*

(ii). *p est la projection sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.*

Proposition 10. *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :*

(i). *$s^2 = \mathrm{Id}_E$ (où $s^2 = s \circ s$),*

(ii). *s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.*

Définition 7. *Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus F^{\perp}$ (ceci est vrai en particulier lorsque F est de dimension finie). On appelle projection orthogonale sur F, notée p_F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F, notée s_F, la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.*

Proposition 11. *Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus F^\perp$ (ceci est vrai en particulier lorsque F est de dimension finie). Notons p_F (resp. $p_{F^\perp}$) la symétrie orthogonale sur F (resp. sur $F^\perp$) et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Alors*

$$\begin{aligned} & p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E \quad (\iff p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E - p_F \iff p_F = \mathrm{Id}_E - p_{F^\perp}), \\ & p_F \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp} \circ p_F = 0_{\mathcal{L}(E)}, \\ \textit{et} \quad & s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E - 2p_{F^\perp}. \end{aligned}$$

Théorème 3. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r)$ est une base orthonormée de F, alors pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est*

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle e_k, x \rangle \, e_k.$$

Définition 8. *Soient $A \subset E$ une partie non vide de E et $x \in E$. On définit la distance de x à A comme*

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\} \in \mathbb{R}^+.$$

Théorème 4. *Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E (ceci est vrai en particulier lorsque F est de dimension finie). On rappelle que l'on note p_F la projection orthogonale sur F. Pour tout $x \in E$, on a*

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$

Ainsi, la distance de x à F est un minimum. De plus, elle est atteinte uniquement en $p_F(x)$.