

Dans tout le chapitre, E désigne un espace préhilbertien (réel ou complexe). On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dont il est muni et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne (resp. hermitienne) associée.

Définition 1. Soient $x, y \in E$. On dit que les vecteurs x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Proposition 1 (Identité de Pythagore).

1. Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$. On a :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2. Soient E un espace préhilbertien complexe et $x, y \in E$. On a :

$$x \perp y \implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Définition 2. On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est orthogonale si elle est constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux, i.e.

$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

On dit que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormée si elle est orthogonale et ses vecteurs sont de plus normés (i.e. pour tout $i \in I$, $\|e_i\| = 1$), ce qui équivaut à

$$\forall i, j \in I, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Proposition 2. Toute famille $(e_i)_{i \in I}$ orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Définition 3. Soit E un espace euclidien ou hermitien. On appelle base orthonormée de E toute famille de vecteurs de E qui est à la fois une base de E et une famille orthonormée.

Proposition 3. Soient E un espace euclidien ou hermitien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Les coordonnées x_1, \dots, x_n d'un vecteur $x \in E$ dans la base \mathcal{B} sont données par :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad x_k = \langle e_k, x \rangle$$

de sorte que $x = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k$.

Proposition 4. Soit E un espace euclidien ou hermitien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soient $x, y \in E$ de coordonnées respectives dans la base \mathcal{B} notées x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n , alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k = {}^t \overline{X} Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = {}^t \overline{X} X$$

où l'on a noté $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

Théorème 1. Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe). Pour toute famille (u_1, \dots, u_n) libre de E , il existe une famille (e_1, \dots, e_n) orthonormée de E vérifiant

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Corollaire 1. Tout espace euclidien ou hermitien E admet une base orthonormée.

Corollaire 2. Toute famille orthonormée d'un espace euclidien ou hermitien E peut être complétée en une base orthonormée de E .

Définition 4. Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de la partie A l'ensemble, noté A^\perp , constitué des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}.$$

Proposition 5. Pour toute partie $A \subset E$, l'orthogonal A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 6. Soient $A, B \subset E$, alors :

1. $A \subset (A^\perp)^\perp$,
2. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ (inversion de l'inclusion),
3. $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.

Proposition 7. Soit $F = \text{Vect}(e_k)_{k \in I}$ un sous-espace vectoriel de E (la famille $(e_k)_{k \in I}$ est une famille génératrice de F). Alors

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall k \in I, \langle e_k, x \rangle = 0\}.$$

Définition 5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont orthogonaux si pour tout vecteur $x \in F$ et tout vecteur $y \in G$, $\langle x, y \rangle = 0$.

Théorème 2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie**, alors $E = F \oplus F^\perp$. On dit que F^\perp est le supplémentaire orthogonal de F .

En particulier, si E est un espace euclidien ou hermitien, pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $E = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 3. Si E est un espace euclidien ou hermitien, pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

$$\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F \quad \text{et} \quad (F^\perp)^\perp = F.$$

Définition 6. On appelle projection sur F parallèlement à G l'endomorphisme p de E défini par

$$\forall x = x_F + x_G \in E \text{ avec } (x_F, x_G) \in F \times G, \quad p(x) = x_F.$$

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E défini par

$$\forall x = x_F + x_G \in E \text{ avec } (x_F, x_G) \in F \times G, \quad s(x) = x_F - x_G.$$

On a alors $s = 2p - \text{Id}_E$.

Proposition 8. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

- (i). $p^2 = p$ (où $p^2 = p \circ p$),
- (ii). p est la projection sur $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Proposition 9. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

- (i). $s^2 = \text{Id}_E$ (où $s^2 = s \circ s$),
- (ii). s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Définition 7. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus F^\perp$ (ceci est vrai en particulier lorsque F est de dimension finie). On appelle projection orthogonale sur F , notée p_F , la projection sur F parallèlement à F^\perp . On appelle symétrie orthogonale par rapport à F , notée s_F , la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp .

Proposition 10. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus F^\perp$ (ceci est vrai en particulier lorsque F est de dimension finie). Notons p_F (resp. p_{F^\perp}) la symétrie orthogonale sur F (resp. sur F^\perp) et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F . Alors

$$\begin{aligned} p_F + p_{F^\perp} &= \text{Id}_E \quad (\iff p_{F^\perp} = \text{Id}_E - p_F \iff p_F = \text{Id}_E - p_{F^\perp}), \\ p_F \circ p_{F^\perp} &= p_{F^\perp} \circ p_F = 0_{\mathcal{L}(E)}, \\ \text{et } s_F &= 2p_F - \text{Id}_E = \text{Id}_E - 2p_{F^\perp}. \end{aligned}$$

Théorème 3. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r)$ est une base orthonormée de F , alors pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^r \langle e_k, x \rangle e_k.$$

Définition 8. Soient $A \subset E$ une partie non vide de E et $x \in E$. On définit la distance de x à A comme

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\} \in \mathbb{R}^+.$$

Théorème 4. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que F et F^\perp sont supplémentaires dans E (ceci est vrai en particulier lorsque F est de dimension finie). On rappelle que l'on note p_F la projection orthogonale sur F . Pour tout $x \in E$, on a

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|.$$

Ainsi, la distance de x à F est un minimum. De plus, elle est atteinte uniquement en $p_F(x)$.