I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points avec $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.

Définition 1. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue et F une primitive de f sur I. On dit que l'intégrale généralisée ou impropre $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ (aussi notée $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$) **converge** si F admet des limites **finies** en α^+ et en β^-. Dans ce cas, on pose alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\nearrow\beta} F(x) - \lim_{x\searrow\alpha} F(x)$.*

*Sinon, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.*

Théorème 1. *Soient $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement, si $\lambda > 1$.*

Théorème 2. *Soient $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\lambda < 1$.*

Proposition 1. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continues. Si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, l'intégrale $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vérifie*

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 2. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue.*

1. *Relation de Chasles : Si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\gamma \in]\alpha;\beta[$, alors les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\gamma^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et vérifient*

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\gamma^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. *Changement de variables : Soit $\varphi : J \longrightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur l'intervalle J d'extrémités $a = \inf(J)$ et $b = \sup(J)$. Les intégrales impropres $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature (i.e $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seule-*

ment si, $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ *converge) et en cas de convergence, on a*

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Théorème 3. *Soient* $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) de classe* $\mathcal{C}^1$. *Si* $\displaystyle\int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, et si la fonction* uv *admet des limites finies en* α *et* β, *alors* $\displaystyle\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et*

$$\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Définition 2. *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) continue. On dit que la fonction* f *est intégrable sur* I *si l'intégrale* $\displaystyle\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Proposition 3. *Soient* $a > 0$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *La fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\lambda}$ *est intégrable sur* $[a; +\infty[$ *si, et seulement, si* $\lambda > 1$. *La fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\lambda}$ *est intégrable sur* $]0; a]$ *si, et seulement, si* $\lambda < 1$.

Proposition 4. *Soient* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) continue et* J *un intervalle inclus dans* I.
- *Si* f *est intégrable sur* I, *elle est aussi intégrable sur* J.
- *Si* f *n'est pas intégrable sur* J, *elle ne l'est pas non plus sur* I.

(La "vraie" notion de voisinage sera vue au moment des espaces vectoriels normés.)

Définition 3. *Soit* $V \subset \mathbb{R}$ *une partie de* $\mathbb{R}$. *On dit que* V *est un voisinage de*
- $a \in \mathbb{R}$ *s'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que l'une des trois parties* $]a-\varepsilon; a[\cup]a; a+\varepsilon[$, $]a-\varepsilon; a[$ *et* $]a; a+\varepsilon[$ *est incluse dans* V,
- *de* $+\infty$ *s'il existe* $A > 0$ *tel que* $]A; +\infty[\subset V$,
- *de* $-\infty$ *s'il existe* $B < 0$ *tel que* $]-\infty; B[\subset V$.

Définition 4. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction. Soit* $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. *On dit que* f *est* définie au voisinage de a *si son domaine de définition est un voisinage de* a.

Définition 5. *Soient J un intervalle (contenant au moins deux points) de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J (c'est-à-dire que a appartient à J ou est une extrémité, éventuellement infinie, de J) et $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).*

(*i*). *On dit que f est* dominée par g au voisinage de *a s'il existe un voisinage V de a tel que*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in V, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.

(*ii*). *On dit que f est* négligeable devant g *au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que*

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

(*iii*). *On dit que f est* équivalente à g *au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que*

$$\forall x \in V, \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Proposition 5. *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J et $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).*

- *Si* $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$, *alors* $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.
- *Si* $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, *alors* $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ *et* $g(x) \underset{x \to a}{=} \mathcal{O}(f(x))$.

Lemme 1. *Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue* ***à valeurs positives*** *et intégrable sur I, on a*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sup \left\{ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \mid [a; b] \subset I \right\}.$$

Théorème 4. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues* ***à valeurs positives*** *telles que $f \leq g$.*

(*i*). *Si g est intégrable sur I, alors f est aussi intégrable sur I.*
De plus, on a alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

(*ii*). *Si f n'est pas intégrable sur I, alors g n'est pas intégrable sur I.*

Théorème 5. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continues. Si* $f(x) \underset{x \to b}{=} \mathcal{O}(g(x))$ *et si g est intégrable sur $[a; b[$, alors f est aussi intégrable sur $[a; b[$.*

Corollaire 1. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continues. Si $f(x) = \underset{x \to b}{o}(g(x))$ et si g est intégrable sur $[a; b[$, alors f est aussi intégrable sur $[a; b[$.*

Corollaire 2. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continues. Si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$, alors f est intégrable sur $[a; b[$ si et seulement si g l'est.*

Proposition 6. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continues, intégrables sur I. Alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I.*

Proposition 7. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*
Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I, alors fg est intégrable sur I et on a

$$\int_I |f(t)g(t)| \,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_I f(t)^2 \,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_I g(t)^2 \,\mathrm{d}t}.$$

Théorème 6. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue. Si f est intégrable sur I alors l'intégrale généralisée $\int_I f(t) \,\mathrm{d}t$ converge et de plus*

$$\left| \int_I f(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Définition 6. *On dit que l'intégrale $\int_I f(t) \,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si f est intégrable sur I, i.e si l'intégrale $\int_I |f(t)| \,\mathrm{d}t$ est convergente. Une intégrale convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.*

Proposition 8. *Soient λ, $\mu \in \mathbb{R}$ et $b > 1$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\lambda (\ln t)^\mu}$ est intégrable sur $[b; +\infty[$ si et seulement si $\lambda > 1$ ou ($\lambda = 1$ et $\mu > 1$).*

Proposition 9. *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 1$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\lambda |\ln t|^\mu}$ est intégrable sur $]0; a]$ si et seulement si $\lambda < 1$ ou ($\lambda = 1$ et $\mu > 1$).*