

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points avec $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.

Définition 1. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue et F une primitive de f sur I . On dit que l'intégrale généralisée ou impropre $\int_I f(t) dt$ (aussi notée $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$) **converge** si F admet des limites **finies** en α^+ et en β^- . Dans ce cas, on pose alors $\int_I f(t) dt = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x)$.
Sinon, on dit que l'intégrale impropre $\int_I f(t) dt$ **diverge**.

Théorème 1. Soient $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge si, et seulement, si $\lambda > 1$.

Théorème 2. Soient $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^a \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge si, et seulement si, $\lambda < 1$.

Proposition 1. Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continues. Si $\int_I f(t) dt$ et $\int_I g(t) dt$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, l'intégrale $\int_I (\lambda f + \mu g)(t) dt$ converge et vérifie

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_I f(t) dt + \mu \int_I g(t) dt.$$

Proposition 2. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue.

1. Relation de Chasles : Si $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ converge et $\gamma \in]\alpha; \beta[$, alors les intégrales $\int_{\alpha}^{\gamma} f(t) dt$ et $\int_{\gamma}^{\beta} f(t) dt$ convergent et vérifient

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\gamma} f(t) dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(t) dt.$$

2. Changement de variables : Soit $\varphi : J \longrightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur l'intervalle J d'extrémités $a = \inf(J)$ et $b = \sup(J)$. Les intégrales impropres $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ et $\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature (i.e $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ converge si, et seule-

ment si, $\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ converge) et en cas de convergence, on a

$$\int_\alpha^\beta f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

Théorème 3. Soient $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de classe $\mathcal{C}^1$. Si $\int_\alpha^\beta u(t)v'(t) dt$ converge, et si la fonction uv admet des limites finies en α et β , alors $\int_\alpha^\beta u'(t)v(t) dt$ converge et

$$\int_\alpha^\beta u'(t)v(t) dt = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t) dt.$$

Définition 2. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue. On dit que la fonction f est intégrable sur I si l'intégrale $\int_I |f(t)| dt$ converge.

Proposition 3. Soient $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda}$ est intégrable sur $[a; +\infty[$ si, et seulement, si $\lambda > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda}$ est intégrable sur $]0; a]$ si, et seulement, si $\lambda < 1$.

Proposition 4. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue et J un intervalle inclus dans I .

- Si f est intégrable sur I , elle est aussi intégrable sur J .
- Si f n'est pas intégrable sur J , elle ne l'est pas non plus sur I .

(La “vraie” notion de voisinage sera vue au moment des espaces vectoriels normés.)

Définition 3. Soit $V \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de

- $a \in \mathbb{R}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'une des trois parties $]a - \varepsilon; a[\cup]a; a + \varepsilon[$, $]a - \varepsilon; a[$ et $]a; a + \varepsilon[$ est incluse dans V ,
- de $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset V$,
- de $-\infty$ s'il existe $B < 0$ tel que $] - \infty; B[\subset V$.

Définition 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f est définie au voisinage de a si son domaine de définition est un voisinage de a .

Définition 5. Soient J un intervalle (contenant au moins deux points) de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J (c'est-à-dire que a appartient à J ou est une extrémité, éventuellement infinie, de J) et $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

(i). On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in V, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

On note alors $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(g(x))$.

(ii). On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$.

(iii). On dit que f est équivalente à g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Proposition 5. Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J et $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$, alors $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(g(x))$.
- Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$, alors $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(g(x))$ et $g(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(f(x))$.

Théorème 4. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues à valeurs positives telles que $f \leq g$.

(i). Si g est intégrable sur I , alors f est aussi intégrable sur I .

$$\text{De plus, on a alors } \int_I f(t) dt \leq \int_I g(t) dt.$$

(ii). Si f n'est pas intégrable sur I , alors g n'est pas intégrable sur I .

Théorème 5. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continues. Si $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow b}(g(x))$ et si g est intégrable sur $[a; b[$, alors f est aussi intégrable sur $[a; b[$.

Corollaire 1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continues. Si $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$ et si g est intégrable sur $[a; b[$, alors f est aussi intégrable sur $[a; b[$.

Corollaire 2. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continues. Si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, alors f est intégrable sur $[a; b[$ si et seulement si g l'est.

Proposition 6. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continues, intégrables sur I . Alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I .

Proposition 7. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I , alors fg est intégrable sur I et on a

$$\int_I |f(t)g(t)| \, dt \leq \sqrt{\int_I f(t)^2 \, dt} \sqrt{\int_I g(t)^2 \, dt}.$$

Théorème 6. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue. Si f est intégrable sur I alors l'intégrale généralisée $\int_I f(t) \, dt$ converge et de plus

$$\left| \int_I f(t) \, dt \right| \leq \int_I |f(t)| \, dt.$$

Définition 6. On dit que l'intégrale $\int_I f(t) \, dt$ est **absolument convergente** si f est intégrable sur I , i.e si l'intégrale $\int_I |f(t)| \, dt$ est convergente. Une intégrale convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Proposition 8. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $b > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda (\ln t)^\mu}$ est intégrable sur $[b; +\infty[$ si et seulement si $\lambda > 1$ ou ($\lambda = 1$ et $\mu > 1$).

Proposition 9. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda |\ln t|^\mu}$ est intégrable sur $]0; a]$ si et seulement si $\lambda < 1$ ou ($\lambda = 1$ et $\mu > 1$).