Réduction des endomorphismes.

.

1. Sommes directes.

1.1. Définition. Soit E un espace vectoriel sur K, ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soit $E_1, ..., E_k$ ses sous-espaces vectoriels. La **somme** $E_1 + ... + E_k$ est le sous-espace formé de tous les vecteurs $v = v_1 + ... + v_k$ où $v_i \in E_i$. La somme est **directe** (noté $E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$) si une telle décomposition est **unique:** si $v = v_1 + ... + v_k = u_1 + ... + u_k$ avec $v_i \in E_i$ et $u_i \in E_i$ alors $v_i = u_i$, $(i = 1, ..., k)$.

1.2. Lemme. Les propriétés 1.-5. suivantes sont équivalentes:

1. La somme $E_1 + ... + E_k$ est directe.
2. La relation $v_1 + ... + v_k = 0$ où $v_i \in E_i$ entraine $v_1 = 0$, ... , $v_k = 0$.
3. Pour tout i on a $E_i \cap (E_1 + ... + E_{i-1} + E_{i+1} + ... + E_k) = \{0\}$.
4. Soit B_1, ... , B_k des bases des sous-espaces $E_1, ..., E_k$. Alors leur réunion $B = B_1 \cup ... \cup B_k$ est libre et donc est une base de la somme $E_1 + ... + E_k$ (base adaptée).
5. Soit dim $(E) < \infty$, alors dim $(E_1 + ... + E_k)$ = dimE_1 + ...+ dimE_k.

Noter: la somme de deux sous-espaces E_1 et E_2 est directe ssi $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Exemple: soit $e_1, ..., e_k$ des vecteurs non-nuls de E. La somme $Ke_1 + ... + Ke_k$ est directe si et seulement si les vecteurs $e_1, ..., e_k$ sont linéairement indépendants. On a $E = Ke_1 \bigoplus ... \bigoplus Ke_k$ si et seulement si $(e_1, ..., e_k)$ est une base de E.

.

2. Sous-espaces stables. Décomposition en blocs.

2.1. Définition. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Un sous-espace F de E est **stable** ou **invariant** par f si $f(F) \subset F$, (donc, si pour tout $v \in F$ on a $f(v) \in F$).

A noter: Ker(f) et Im(f) sont des sous-espaces stables par f.

2.2. Lemme. Si g commmute avec f, $fg = gf$, alors Ker(g) et Im(g) sont des sous-espaces stables par f.

[En particulier, on peut prendre $g = a_0 Id + a_1 f + ... + a_k f^k$.]

Si F est stable par f, on définit **l'endomorphisme unduit** $f_F : F \to F$ par $f_F(v) = f(v)$ si $v \in F$. Dans une base de E où les premiers vecteurs forment une base de F la matrice de f est triangulaire par blocs.

Soit E la somme directe des sous-espaces stables par f, $E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$; soit f_i l'endomorphisme induit dans E_i. Alors l'étude de f se réduit à l'étude de chaque f_i séparement: f est une sorte la "somme directe" des f_i. La matrice de f dans une base adaptée est diagonale par blocs, le i-ème bloc diagonal étant la matrice de f_i. Un des objectifs de la réduction est de décomposer f en blocs de taille minimum (blocs"indécomposables").

.

3. Vecteurs propres, valeurs propres, diagonalisation

.

3.1. Définition: Un **vecteur propre** de f est vecteur **non-nul** v tel que $f(v)$ est colinéaire à v: $f(v) = \lambda v$; le coefficient de proportionalité λ est la

valeur propre associée. Un scalaire λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$.

3.2. Définition. Soit $\lambda \in K$. Le sous-espace

$E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id) = \{v \in E : f(v) = \lambda v\}$ s'appelle **l'espace propre associé à** λ. (Noter que $E_0 = \text{Ker }(f)$).

Exemples: 1. Une homothétie $f = \lambda Id$: tous les vecteurs non-nuls de E sont des vecteurs propres de valeur propre λ, $E = E_\lambda$.

2. *Projecteurs.* Soit f un projecteur; alors $E =\text{Ker}(f) \bigoplus \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f) = E_0$, $\text{Im}(f) = E_1$.

3.3. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** s'il admet une base des vecteurs propres.

La matrice de l'endomorphisme dans une base de vecteurs propres est diagonale, avec les valeurs propres sur la diagonale principale.

3.4. Proposition. *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants.*

3.5. Corollaire. Les espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

3.6. Corollaire. Un endomorphisme est **diagonalisable** si et seulement si E est la somme de ses espaces propres. Si $\dim(E) < \infty$, un endomorphisme est **diagonalisable** si et seulement si la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à $\dim(E)$.

3.7. Corollaire. Soit $n =\dim(E) < \infty$. Alors f admets au plus n valeurs propres et si f admet exactement n valeurs propres (deux à deux distinctes), f est diagonalisable.

3.8. Similitude. Définition. Deux endomorphismes $f : E \to E$ et $g : E' \to E'$ sont **semblables** si il existe un isomorphisme $\varphi : E \to E'$ tel que $\varphi f = g\varphi$ (donc $f = \varphi^{-1} g \varphi$).

Si $f(v) = \lambda v$ alors $g(\varphi(v)) = \lambda\varphi(v)$, donc les endomorphismes semblables ont les mêmes valeurs propres et leurs espaces propres sont liés par φ:

$E_\lambda(f) = \varphi(E_\lambda(g))$.

Deux matrices carrées A et B sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $PA = BP$ (donc $A = P^{-1}BP$).

Remarque: Deux endomorphismes sont semblables si et seulement si leurs matrices (dans n'importe quelles bases) sont semblables.

.

4. A la recherche des vecteurs propres: polynôme caractéristique.

Soit $\dim(E) = n < \infty$.

On remarque que λ est une valeur propre si et seulement si $f - \lambda Id$ n'est pas injectif ($Ker(f - \lambda I) \neq \{0\}$). En dimension finie cette condition est équivalente à dét $(f - \lambda Id) = 0$. C'est *l'équation caractéristique* pour les valeurs propres.

4.1. Définition. Le déterminant $p_f(x) = \text{dét }(f - xId)$ s'appelle **polynôme caractéristique** de f: c'est est un polynôme en x de degré n.

Les valeurs propres sont donc les racines du polynôme caractéristique.

[Parfois on définit le polynôme caractéristique comme $\text{dét}(xId - f) = (-1)^n p_f(x)$.]

Similitude. Soit f et g deux endomorphismes semblables: $g = \varphi^{-1} f \varphi$. Vu que dét $(\varphi^{-1} f \varphi - xId) =$ dét $(\varphi^{-1}(f - xId)\varphi) =$ dét $(f - xId)$, **les endomorphismes semblables ont le même polynôme caractéristique.**

Si la matrice de f dans une base B est diagonale, $M_B(f) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $p_f(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

Donc une condition nécessaire pour que f soit diagonalisable est que p_f soit scindé (vérifiée automatiquement si $K = \mathbf{C}$). Voici une condition suffisante:

4.2. Proposition. Si p_f admet n racines distinctes (donc p_f est scindé à racines simples), f est diagonalisable.

Exemples: 1. Si $f = aId$, une homothétie, alors $p_f(x) = (-1)^n (x - a)^n$.

Si $g = f + aId$, alors $p_g(x) = p_f(x - a)$.

2. Si f une projection, $p_f(x) = (-1)^n x^k (x - 1)^{n-k}$, où k =dim (Ker f).

4.3. Endomorphisme cyclique et matrice "compagnon". Un endomorphisme f est **cyclique** s'il existe un vecteur v tel que $(v, f(v), ..., f^{(n-1)}(v))$ est une base de E. On pose $e_0 = v$, $e_1 = f(x)$,..., $e_{n-1} = f^{(n-1)}(v)$. Dans cette base f agit comme: $f(e_0) = e_1$, $f(e_1) = e_2$,..., $f(e_{n-2}) = e_{n-1}$, et $f(e_{n-1}) = a_0 e_0 + ... + a_{n-1} e_{n-1}$. La matrice de f s'appelle *matrice compagnon.* Alors $p_f(x) = (-1)^n (x^n - a_{n-1} x^{n-1} - ... - a_1 x - a_0)$.

4.4. Définition. Un endomorphisme est **nilpotent** s'il existe k tel que $f^k = 0$. La valeur minimal de k s'appelle l'**indice de nilpotence** de f.

4.5. Proposition. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il a le même polynôme caractéristique que l'endomorphisme nul: $p_f(x) = (-1)^n x^n$.

4.6. Corollaire. Un endomorphisme nilpotent non-nul n'est pas diagonalisable.

.

Structure du polynôme caractéristique. Soit A la matrice de f dans une base, $p_f(x) =$dét $(A - xI_n) = (-1)^n x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1} x + c_n$.

4.7. Lemme. 1. Les coefficients $c_1, ..., c_n$ sont des polynômes en éléments matriciels a_{ij} de A; c_k est un polynôme homogène de degré k.

2. $c_1 = (-1)^{n-1} trace(A) = (-1)^{n-1} trace(f)$

3. $c_n =$ dét$(A) =$ dét(f).

4. c_k est invariant par similitude: c_k est le même pour A et $P^{-1}AP$.

5. Les coefficients c_k sont des fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres: si $p_f(x) = (-1)^n x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1} x + c_n = (-1)^n (x - \lambda_1) ... (x - \lambda_n)$ alors $c_1 = (-1)^{n-1} (\lambda_1 + ... + \lambda_n)$,

$c_n = \lambda_1 ... \lambda_n$,

$c_k = (-1)^{n-k} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_k}$.

.

Sous-espaces stables. Soit F un sous-espace stable par f; dans une base adaptée la matrice de f est triangulaire par blocs.

4.8. Lemme. Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

4.9. Corollaire. Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit f_F divise le polynôme caractéristique de f.

4.10. Corollaire. La dimension de l'espace propre E_λ ne dépasse pas la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.

4.11. Corollaire. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si p_f est scindé et la dimension de chaque espace propre E_λ est égale à la multiplicité de λ.

Remarque. Si E est la somme directe des sous-espaces stables par f, $E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$, le polynôme caractéristique de f est le produit des polynômes caractéristiques des endomorphismes f_i induits dans E_i $(i = 1, ..., k)$.

.

5. Polynômes annulateurs.

Soit $q \in K[x]$, $q(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k$. Soit f un endomorphisme de E.

On note $q(f) = a_0 Id + a_1 f + ... + a_k f^k$.

5.1. Définition. On dit qu'un polynôme $q(x)$ est **un polynôme annulateur** de f si $q(f) = 0$ (on dit aussi que q annule f ou que f annule q).

Remarque: Si $q(f) = 0$ et λ est une valeur propre de f, alors $q(\lambda) = 0$: *chaque valeur propre de f est une racine de tout polynôme annulateur.*

Remarque: si $a_0 Id + a_1 f + ... + a_k f^k = 0$ et $a_0 \neq 0$, alors f est inversible : $f(a_1 Id + ... + a_k f^{k-1}) = -a_0 Id$, et $f^{-1} = -(a_1 Id + ... + a_k f^{k-1})/a_0$.

Exemple: soit f diagonalisable, $\lambda_1, ..., \lambda_k$ ses valeurs propres deux à deux distinctes et $q(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$. Alors $q(f) = 0$. A fortiori, pour le polynôme caractéristique $p_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} ... (x - \lambda_k)^{m_k}$, on a $p_f(f) = 0$.

Remarque: on peut déterminer $q(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$ à partir de p_f sans calculer les valeurs propres: $\pm q = \frac{p_f}{pgcd(p_f, p'_f)}$.

Le lemme suivant ("lemme des noyaux") nous permettra de décomposer E en somme directe des sous-espaces stables.

5.2. Lemme des noyaux. Soit $p_1, ..., p_k$ des polynômes deux à deux premiers entre eux et $p(x) = p_1(x)...p_k(x)$. Alors

$$Ker(p(f)) = Ker(p_1(f)) \bigoplus ... \bigoplus Ker(p_k(f)).$$

5.3. Proposition. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

5.4. Corollaire. L'endomorphisme induit dans un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.

5.5. Corollaire. Deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont diagonalisables simultanément: il existe une base commune de vecteurs propres.

Remarque. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il est annulé par le polynôme $q = \frac{p_f}{pgcd(p_f, p'_f)}$ et q est scindé. (Dans ce cas q sera égal, au signe près, au polynôme minimal de f.)

5.6. Théorème (Cayley - Hamilton). Tout endomorphisme f est annulé par son polynôme caractéristique: $p_f(f) = 0$.

.

6. Trigonalisation.

6.1. Définition. Un endomorphisme est **trigonalisable** s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire (supérieure ou inférieure).

Si la matrice de f est triangulaire avec les éléments $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sur la diagonale principale, alors $p_f(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)...(x-\lambda_n)$. Donc $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de f (comptées avec leurs multiplicités).

6.2. Proposition. Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

En particulier, tout endomorphisme est trigonalisable sur **C**.

6.3. Corollaire. Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable.

Soit $q(x)$ un polynôme. Si la matrice de f est triangulaire avec les éléments $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sur la diagonale principale, la matrice de $q(f)$ est aussi triangulaire avec les éléments $q(\lambda_1), ..., q(\lambda_n)$ sur la diagonale principale, qui sont donc les valeurs propres de $q(f)$.

6.4. Corollaire. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_n$ la liste des valeurs propres complexes de f (comptées avec leurs multiplicités). Alors $q(\lambda_1), ..., q(\lambda_n)$ est la liste des valeurs propres (complexes) de $q(f)$.

En particulier, $tr(f^k) = \sum_1^n \lambda_i^k$.

Remarque: Les traces des puissances $s_k = tr(f^k)$ sont liées avec les coefficients du polynôme caractéristique $p_f(x) = (-1)^n x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n$ par les *formules de Newton:*

$$(-1)^n s_k + c_1 s_{k-1} + ... + c_{k-1}s_1 + kc_k = 0$$

$k = 1, 2, ..., n$. Cela permet d'exprimer les c_k en termes des s_k (ou réciproquement) par récurrence. [Rappelons que $c_k = (-1)^{n-k} \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_k}$.]

.

7. Sous-espaces caractéristiques.

7.1. Définition. Soit λ une valeur propre de multiplicité m. Le sous-espace $\mathcal{C}_\lambda = Ker(f-\lambda)^m$ s'appelle le **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ. Noter que $\mathcal{C}_\lambda$ est stable par f et contient l'espace propre associé à λ.

Le lemme des noyaux donne le corollaire:

7.2. Corollaire. Les espaces caractéristiques associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

7.3. Lemme. La dimension de $\mathcal{C}_\lambda$ est égale à la multiplicité de λ.

En combinant le théorème de Cayley-Hamilton avec le lemme des noyaux on obtient:

7.4. Corollaire. Si le polynôme caractéristique de f est scindé, E se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques de f: $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$.

.

7.5. Projecteurs spectraux. Soit $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$. Soit Π_i la projection sur le sous-espace caractéristique $\mathcal{C}_i$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques. On appelle Π_i **projecteur spectral**.

Pour calculer Π_i on écrit $p_f(x) = (x-\lambda_i)^{m_i}q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x-\lambda_i)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda_i) \neq 0$). Par la formule de Bézout, on peut trouver des polynômes $r(x)$ et $s(x)$ tels que $(x-\lambda_i)^{m_i}r(x) + q(x)s(x) = 1$.

[On peut s'arranger pour que deg $(s) < m_i$ et deg $(r) <$ deg(q)].

7.6. Lemme. $\Pi_i = q(f)s(f)$.

Remarques. 1) Les projecteurs Π_i commutent entre eux et avec f. La somme des Π_i est l'identité.

2) Si Π est un projecteur et $\Pi f = f\Pi$, alors $\mathrm{Ker}(\Pi)$ et $\mathrm{Im}(\Pi)$ sont des sous-espaces supplémentaires stables par f.

3) Si $E_\lambda \neq \mathcal{C}_\lambda$, alors E_λ n'admet pas de sous-espace supplémentaire stable par f.

4) Si f est diagonalisable, on peut écrire $f = \sum_i \lambda_i \Pi_i$

Exemple. Soit $\dim E = 3$ et $p_f(x) = -(x-\lambda)(x-\mu)^2$. Alors

$1 = a(x-\mu)^2 + a(2\mu-\lambda-x)(x-\lambda)$, où $a = (\lambda-\mu)^{-2}$. Donc $\Pi_\lambda = a(f-\mu Id)^2$ et $\Pi_\mu = -a(f-(2\mu-\lambda)Id)(f-\lambda Id)$.

.

Etude de f dans les sous-espaces caractéristiques.

Supposons que le polynôme caractéristique de f est scindé.

Soit f_i l'endomorphisme induit dans $\mathcal{C}_i$. On a $(f_i - \lambda_i Id)^{m_i} = 0$, donc $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$, où $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$, donc $\mathbf{n}_i$ est nilpotent.

En utilisant cette décomposition, définissons deux endomorphismes, $\mathbf{d}$ et $\mathbf{n}$: si $v \in \mathcal{C}_i$, on pose $\mathbf{d}(v) = \lambda_i v$ et $\mathbf{n}(v) = \mathbf{n}_i(v)$. Donc $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$.

En utilisant les projecteurs spectraux, on écrit $\mathbf{d} = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ et $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$.

En résumé, $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ où $\mathbf{d}$ est diagonalisable, $\mathbf{n}$ est nilpotent et $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{n}$.

7.7. Théorème. (Décomposition de Dunford.) Si le polynôme caractéristique de f est scindé, f se décompose en somme $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ où $\mathbf{d}$ est diagonalisable, $\mathbf{n}$ est nilpotent et $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{n}$. Une telle décomposition est unique.

Remarque. 1) On a $p_f(x) = p_{\mathbf{d}}(x)$.

2) f est diagonalisable si et seulement si $\mathbf{n} = 0$.

.

8. Polynôme minimal.

En dimension finie, il y a toujours des polynômes annulateurs non-nuls: la suite $Id, f, f^2, ..., f^{n^2}$ de n^2+1 endomorphismes est liée parce que la dimension de l'espace des endomorphismes est n^2. La relation $a_0 Id + a_1 f + ... + a_k f^k = 0$ donne un polynôme annulateur.

8.1. Définition. Un **polynôme minimal** de f est un polynôme annulateur non-nul de degré minimum.

8.2. Proposition. *Un polynôme minimal divise tout polynôme annulateur.*

Par conséquent, il y a un seul polynôme minimal **unitaire** (de coefficient dominant 1), appelé **le** polynôme minimal, noté π_f. En particuler, le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

Si $p_f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1} ... (x-\lambda_k)^{m_k}$ alors $\pi_f(x) = (x-\lambda_1)^{l_1} ... (x-\lambda_k)^{l_k}$ avec $1 \leq l_i \leq m_i$. En général, on a

8.3. Proposition. 1. Les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres.

2. Le polynôme minimal est scindé si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé.

8.4. Critère de diagonalisabilité. *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.*

8.5. Lemme. Soit E la somme directe des sous-espaces stables,
$E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$; soit f_i l'endomorphisme induit dans E_i. Alors
$\pi_f = ppcm(\pi_{f_1}, ..., \pi_{f_k})$.

Exemple: soit f un endomorphisme nilpotent; son polynôme caractéristique est $p_f(x) = (-1)^n x^n$ (n =dim(E)) et le polynôme minimal est $\pi_f(x) = x^k$, où k est l'indice de nilpotence de f.

8.6. Corollaire. Si $\pi_f(x) = (x - \lambda_1)^{l_1} ... (x - \lambda_k)^{l_k}$, alors l_i est l'indice de nilpotence de $f_i - \lambda_i Id$ dans le sous-espace caractéristique $\mathcal{C}_i$.

En particulier, $\mathcal{C}_i = Ker(f - \lambda_i Id)^{l_i}$.

8.7. Théorème. $\pi_f(x) = \pm p_f(x)$ si et seulement si f est cyclique (**4.3**).

Calcul du polynôme minimal: on cherche l tel que la famille $Id, f, f^2, ..., f^{l-1}$ est libre dans l'espace des endomorphismes, mais $Id, ff^2, ..., f^{l-1}, f^l$ est liée, donc $a_0 Id + a_1 f + ... + a_{l-1} f^{l-1} + f^l = 0$. Alors
$\pi_f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{l-1} x^{l-1} + x^l$.

.

9. Blocs de Jordan.

Un bloc de Jordan pour f est un sous-espace stable muni d'une base $e_1, ..., e_k$ telle que $f(e_1) = \lambda e_1 + e_2$, . . . , $f(e_{k-1}) = \lambda e_{k-1} + e_k$, $f(e_k) = \lambda e_k$. Noter que le sous-espace en question est contenu dans le sous-espace caractéristique $\mathcal{C}_\lambda$. La matrice de f dans cette base s'appelle aussi bloc de Jordan.

9.1. Théorème. Si p_f est scindé, f admet la décomposition en somme directe des blocs de Jordan.

En particulier, tout endomorphisme sur **C** peut être réduit à la forme de Jordan.

Critère de similitude. La liste des blocs de Jordan dans la décomposition est complètement déterminée par f. Plus précisement, soit j_k le nombre de blocs de Jordan de dimension k dans le sous-espace caractéritisque $\mathcal{C}_\lambda$. Soit l_k = dim (Ker $(f - \lambda Id)^k$. Alors $j_k = 2l_k - l_{k+1} - l_{k-1}$.

Remarque. La taille maximal des blocs associés à la valeur propre λ est égal à la multiplicité de λ dans π_f.

9.2. Théorème. Deux matrices sont semblables sur **C** si et seulement si elles ont la même liste des blocs de Jordan.

9.3. Théorème. Si deux matrices réelles sont semblables sur **C**
($A = P^{-1}BP$ avec P complèxe), elles sont semblables sur **R**
($A = Q^{-1}BQ$ avec Q réelle).

9.4. Corollaire. Toute matrice est semblable à sa transposée.