

## Groupes.

1. Une **loi de composition** sur un ensemble  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $E$ .

La loi est **associative** si  $(ab)c = a(bc)$  quel que soient  $a, b, c \in E$ .

La loi est **commutative** si  $ab = ba$  quel que soient  $a, b \in E$ .

Si la loi est associative, on peut définir de façon unique, pour tout  $n$ , le produit ordonné de  $n$  éléments  $a_1, \dots, a_n$  de  $E$  tel que pour tout  $k < n$  on a  $a_1 \dots a_n = (a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_n)$ .

2. Un élément  $e$  de  $E$  est **neutre** si pour tout  $a \in E$  on a  $ae = ea = a$ .

**Lemme.** Il existe au plus un élément neutre.

3. Si  $E$  admet un élément neutre  $e$ , on dit que  $a$  est **inversible** s'il existe un élément  $a'$ , appelé **inverse** de  $a$ , tel que  $aa' = a'a = e$ .

**Lemme.** Si la loi est associative, il existe au plus un inverse de  $a$ , noté  $a^{-1}$ .

4. Un ensemble muni d'une loi de composition associative s'appelle **semi-groupe**. Un semi-groupe avec un élément neutre s'appelle **monoïde**. Un monoïde dans lequel tous les éléments sont inversibles s'appelle **groupe**.

**Lemme.** L'ensemble des éléments inversibles d'un monoïde est un groupe.

*Exemple.* Soit  $X$  un ensemble et  $E$  l'ensemble de toutes les applications de  $X$  dans  $X$ ; la composition des applications fait de  $E$  un monoïde. Les applications inversibles (les bijections  $X \rightarrow X$ ) constituent le **groupe des permutations** de  $X$ , noté  $S(X)$ .

*Exemple.* Soit  $V$  un espace vectoriel et  $E$  l'ensemble de toutes les endomorphismes de  $V$ ; c'est un monoïde par rapport à la composition (en fait, c'est une *algèbre*). Les endomorphismes inversibles constituent le **groupe linéaire** de  $V$ , noté  $GL(V)$ .

*Exemple:*  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$  est un monoïde par rapport à la multiplication (noter que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un anneau). La classe de  $k$  est inversible modulo  $n$  si et seulement si  $k$  est premier avec  $n$ . Le groupe des classes inversibles - le groupe multiplicatif de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  - sera noté  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ .

Le nombre d'éléments du groupe  $G$  s'appelle l'**ordre** de  $G$  et se note  $|G|$ .

5. Une partie  $H$  du groupe  $G$  est un **sous-groupe** de  $G$  si  $H$  est non-vide, stable pour la loi et si pour tout élément  $a \in H$  on a  $a^{-1} \in H$ .

**Lemme.** Une intersection de sous-groupes est un sous-groupe.

Soit  $G$  un groupe et  $A$  une partie non-vide de  $G$ . Le sous-groupe de  $G$  **engendré** par  $A$ , noté  $\langle A \rangle$ , est l'intersection de tous les sous-groupes qui contiennent  $A$ ; c'est le plus petit sous-groupe contenant  $A$ .

**Lemme.**  $\langle A \rangle$  consiste de tous les produits des éléments de  $A$  et de leurs inverses.

Si  $\langle A \rangle = G$ , on dit que  $A$  **engendre**  $G$ .

**Lemme.** Les sous-groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  sont de la forme  $n\mathbb{Z}$ .

On a  $\langle k, n \rangle = d\mathbb{Z}$  où  $d = \text{pgcd}(k, n)$  et  $k\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$  où  $m = \text{ppcm}(k, n)$ .

6. Soit  $G$  et  $G'$  deux groupes; une application  $f : G \rightarrow G'$  est un **morphisme** de groupes si  $f(ab) = f(a)f(b)$  quels que soit  $a, b \in G$ .

La composée de deux morphismes est un morphisme. Si un morphisme  $f$  est bijectif, son inverse  $f^{-1}$  est un morphisme; dans ce cas  $f$  est un **isomorphisme**.

L'isomorphisme est une relation d'équivalence entre les groupes. Si les groupes sont isomorphes, leurs propriétés algébriques sont identiques.

L'ensemble de tous les morphismes  $f : G \rightarrow G$  est un monoïde; les morphismes bijectifs forment le groupe des automorphismes de  $G$ .

*Exemple.* Soit  $a \in G$  et  $f_a(b) = aba^{-1}$ , alors  $f_a : G \rightarrow G$  est un automorphisme de  $G$ . L'application qui fait correspondre à  $a \in G$  l'automorphisme  $f_a$  est un morphisme de  $G$  dans le groupe des automorphismes de  $G$ .

Soit  $f : G \rightarrow G'$  un morphisme de groupes. On définit le **noyau** de  $f$  par  $\text{Ker}(f) = \{x \in G : f(x) = e'\}$ .  $\text{Ker}(f)$  est un sous-groupe de  $G$ . L'image  $\text{Im}(f)$  est un sous-groupe de  $G'$ .

**7. Lemme.** a) Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ ,  $f(H)$  est sous-groupe de  $G'$ . Si  $H'$  est un sous-groupe de  $G'$ ,  $f^{-1}(H')$  est sous-groupe de  $G$ .

b)  $f$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{e\}$ .

c)  $|G| = |\text{Ker}(f)| |\text{Im}(f)|$ .

**8.** Un groupe est dit **monogène** s'il est engendré par un seul élément; un groupe monogène fini est dit **cyclique**.

*Exemples:*  $(\mathbb{Z}, +)$ ;  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .

Soit  $a \in G$ ; l'**ordre** de  $a$  est le plus petit entier  $k > 0$  tel que  $a^k = e$ ; si un tel  $k$  n'existe pas, on dit que l'ordre de  $a$  est infini.

**Lemme.** a) L'ordre de  $a$  est égal à l'ordre du sous-groupe engendré par  $a$ .

b) Si  $a^n = e$ , alors  $\text{ord}(a)$  divise  $n$ .

c) Un groupe fini  $G$  est engendré par  $a$  si et seulement si  $\text{ord}(a) = |G|$ .

d) Si  $\text{ord}(a) = n$ , alors  $\text{ord}(a^k) = n/\text{pgcd}(k, n) = \text{ppck}(k, n)/k$ .

e) Si  $G = \langle a \rangle$ , alors  $a^k$  est un générateur de  $G$  si et seulement si  $k$  est premier avec  $n$ .

f)  $\text{ord}(ab) = \text{ord}(ba)$ .

g) Soit  $\text{ord}(a) = k$ ,  $\text{ord}(b) = n$  et  $ab = ba$ . Alors  $\text{ord}(ab)$  est fini et divise  $\text{ppcm}(k, n)$ .

h) Si  $G$  est commutatif, l'ensemble d'éléments d'ordre fini est un sous-groupe de  $G$ .

i) Soit  $\text{ord}(a) = k$ ,  $\text{ord}(b) = n$  et  $ab = ba$ . Alors  $\text{ord}(ab) = kn$  si et seulement si  $k$  est premier avec  $n$ .

### 9. Structure des groupes cycliques.

a) L'image homomorphe d'un groupe cyclique est cyclique.

b) Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

c) Deux groupes cycliques de même ordre sont isomorphes. Un groupe cyclique d'ordre  $n$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ . Un groupe monogène infini est isomorphe à  $(\mathbb{Z}, +)$

d) Soit  $G$  un groupe cyclique d'ordre  $n$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Alors l'ordre de  $H$  divise  $n$  et pour tout diviseur  $d$  de  $n$  il existe un seul sous-groupe  $H_d$  d'ordre  $d$ : on a  $H_d = \{x \in G : x^d = e\}$ .

**10. L'indicatrice d'Euler**  $\varphi(n)$  est le nombre d'entiers entre 1 et  $n$  qui sont premiers avec  $n$ . Noter que  $\varphi(n)$  est égale au nombre de générateurs de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  et à l'ordre du groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ .

Si  $p$  est premier,  $\varphi(p) = p - 1$ .

**Lemme.** Soit  $G$  un groupe cyclique d'ordre  $n$  et  $d$  un diviseur de  $n$ . Le nombre d'éléments de  $G$  d'ordre  $d$  est égal à  $\varphi(d)$ .

**Corollaire: formule d'Euler.**  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ .

**11. Théorème de Lagrange.** Dans un groupe fini l'ordre de tout sous-groupe divise l'ordre du groupe.

**Corollaire. a)** Dans un groupe fini l'ordre de tout élément divise l'ordre du groupe.

**b)** Tout groupe d'ordre premier est cyclique.

Appliqué au groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , le corollaire a) donne

**Théorème d'Euler.** Si  $k$  est premier avec  $n$ , on a  $k^{\varphi(n)} = 1 \pmod{n}$ .

**Corollaire: petit théorème de Fermat.** Si  $p$  est premier qui ne divise pas  $k$ , alors  $k^{p-1} = 1 \pmod{p}$ .

**12. Théorème de Cauchy.** Soit  $G$  un groupe fini net  $p$  un diviseur premier de l'ordre de  $G$ . Alors  $G$  possède un élément d'ordre  $p$ .

**Corollaire.** Un groupe fini commutatif dont l'ordre n'est pas divisible par un carré est cyclique.

**13.** Etant donné deux groupes  $G_1$  et  $G_2$  on définit dans l'ensemble  $G_1 \times G_2$  la loi du **groupe-produit** ou **produit direct** "composante par composante":  $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$ . Cette définition s'étend à un nombre quelconque de groupes. (On définit de même façon le produit de monoïdes et des anneaux.)

**Lemme.** Le produit de deux groupes cycliques est cyclique si et seulement si leurs ordres sont premiers entre eux.

**Théorème chinois.** Soit  $k$  et  $n$  premiers entre eux. Alors l'anneau  $\mathbb{Z}/kn\mathbb{Z}$  est isomorphe à l'anneau produit  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

[Il suffit d'associer à la classe  $a \pmod{kn}$  le couple  $(a \pmod{k}, a \pmod{n})$ .]

**Corollaire.** Soit  $k$  et  $n$  premiers entre eux. Alors le groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/kn\mathbb{Z})^*$  est isomorphe au produit  $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ .

**Corollaire. Multiplicativité de l'indicatrice d'Euler.** Soit  $k$  et  $n$  premiers entre eux. Alors  $\varphi(kn) = \varphi(k)\varphi(n)$ .

Si  $n = p_1^{a_1} \dots p_l^{a_l}$  la décomposition de  $n$  en facteurs premiers,

$$\varphi(n) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}) \dots (p_l^{a_l} - p_l^{a_l-1}).$$

**14. Théorème.** Tout groupe commutatif fini est isomorphe au produit direct des groupes cycliques.

**Théorème.** Tout groupe commutatif engendré par un nombre fini d'éléments est isomorphe au produit direct des groupes monogènes.

### 15. Groupe des permutations.

On dit que le groupe  $G$  agit (ou opère) sur un ensemble  $E$  si on a un morphisme  $\phi$  de  $G$  dans le groupe des permutations de  $E$ : pour tout  $g \in G$ ,  $\phi(g) \in S(E)$  et  $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ .

**Théorème (Cayley).** Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations. Plus précisément,  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $S(G)$ .

[Il suffit de considérer l'action de  $G$  sur  $G$  par les "translations":

$$\phi(g)(h) = gh.]$$

Soit  $E = [1, n]$ ; par définition, le groupe  $S_n$  agit sur  $E$ .

La permutation circulaire de  $k$  entiers  $i_1, \dots, i_k$ , notée  $(i_1, \dots, i_k)$ , envoie  $i_j$  en  $i_{j+1}$ , envoie  $i_k$  en  $i_1$  et laisse fixes les autres éléments. Une telle permutation s'appelle **cycle** de longueur  $k$ ; l'ensemble  $\{i_1, \dots, i_k\}$  est son **support**.

Les cycles de supports disjoints commutent entre eux.

Une **transposition** est un cycle de longueur 2.

**Lemme.** Toute permutation se décompose en produit des transpositions.

**16.** Une partie  $F$  de  $E$  est **invariante** ou **stable** par  $G$  si pour tout  $g \in G$  et tout  $x \in F$  on a  $\phi(g)(x) \in F$ .

Soit  $x \in E$ ; la  $G$ -**orbite** de  $x$  est l'ensemble  $O_x = \{\phi(g)(x), g \in G\}$ . Toute orbite est invariante.

**Lemme.**  $E$  est la réunion des orbites deux à deux disjointes.

Soit  $\sigma \in S_n$ . Le sous-groupe  $\langle \sigma \rangle$  agit sur  $[1, n]$  et l'ensemble  $[1, n]$  se décompose en orbites sous l'action (des puissances) de  $\sigma$ . Sur chaque orbite la permutation  $\sigma$  agit comme un cycle dont la longueur est le cardinal de l'orbite (les orbites singletons - les points fixes de  $\sigma$  - ne comptent pas).

**Proposition.** Toute permutation se décompose en produit des cycles de support disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre de facteurs près.

**Corollaire. a)** Soit  $l_1, \dots, l_k$  les longueurs des cycles dans la décomposition de  $\sigma$ . Alors l'ordre de  $\sigma$  est égal à  $\text{ppcm}(l_1, \dots, l_k)$ .

**b)** Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont les mêmes listes des longueurs des cycles dans leurs décomposition en produit des cycles disjoints.

**17. Signature. Lemme.** Soit  $\pi \in S_n$ . Les expressions suivantes donnent le même résultat:

1.  $\text{sign}(\pi) = (-1)^r$ , si  $\pi$  se décompose en produit de  $r$  transpositions.

2.  $\text{sign}(\pi) = (-1)^{n+o(\pi)}$ , où  $o(\pi)$  est le nombre des orbites de  $\pi$  (le nombre de cycles plus le nombre de points fixes de  $\pi$ ).

3.  $\text{sign}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ , où  $I(\pi)$  est le nombre d'inversions pour  $\pi$  - le nombre de paires  $(i, j)$  tels que  $i < j$  mais  $\pi(i) > \pi(j)$ .

4.  $\text{sign}(\pi) = \prod_{i < j} (\pi(i) - \pi(j)) / (i - j)$ .

La **signature** de  $\pi$  est définie par une de ces formules.

**Lemme.**  $\text{sign}(\pi\sigma) = \text{sign}(\pi) \text{sign}(\sigma)$ . Aurement dit,  $\text{sign}$  est un morphisme de  $S_n$  dans le groupe multiplicatif  $\{1, -1\}$ .

### 18. Déterminant.

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f : E \times \dots \times E \rightarrow K$  une forme  $n$ -linéaire anti-symétrique (alternée).

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On décompose les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  suivant la base:  $v_j = \sum_i a_{ij} e_i$ .

**Lemme.**

$$f(v_1, \dots, v_n) = c \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} \dots a_{\pi(n),n} = c \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} \dots a_{n,\pi(n)}$$

où  $c = f(e_1, \dots, e_n)$ .

Si  $c = 1$ , il s'agit du déterminant dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ .