Géométrie affine.

.

Soit E un R-espace vectoriel de dimension finie.

.

1.1. Définition. Un **espace affine** dirigé par E est un ensemble non-vide $\mathcal{E}$ muni de l'application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$ qui associe au couple de points $A, B \in \mathcal{E}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et qui vérifie

1. Pour tout $O \in \mathcal{E}$ l'application $A \to \overrightarrow{OA}$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur E.

2. Pour tous $A, B, C \in \mathcal{E}$ on a la *relation de Chasles:* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

La *dimension* de $\mathcal{E}$ est par définition celle de E.

Exemple. L'espace vectoriel E admet une **structure canonique de l'espace affine**: pour deux vecteurs u et v on pose $\overrightarrow{uv} = v - u$.

.

1.2. Vectorialisation. Fixons "l'origine" O dans $\mathcal{E}$. Soit $v(A) = \overrightarrow{OA}$. Alors $v : \mathcal{E} \to E$ est une bijection qui identifie la structure affine de $\mathcal{E}$ avec la structure affine canonique de E: $\overrightarrow{v(A)v(B)} = v(A) - v(B) = \overrightarrow{AB}$ - conséquence de la relation de Chasles. Le choix d'origine donc "vectorialise" l'espace affine. Réciproquement, on peut dire qu'un espace affine est un espace vectoriel avec l'origine effacée.

.

1.3. Translations. Soit $v \in E$. On définit la translation de vecteur v, noté $T_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par la condition $\overrightarrow{AT_v(A)} = v$.

Propriétés des translations:

(i) $T_0 = Id$ et $T_{u+v} = T_u T_v$ (relation de Chasles). En particulier, T_v est une bijection, et $T_v^{-1} = T_{-v}$.

On exprime cette propriété en disant que le groupe additif E agit sur l'espace affine $\mathcal{E}$.

(ii) Pour tous deux points $A, B \in \mathcal{E}$ il existe un unique vecteur v tel que $T_v(A) = B$.

Si $\mathcal{E} = E$, on a $T_v(u) = v + u$.

Par analogie, on adopte la notation: $T_v(a) = A + v$;

1.4. Remarque. La donnée de la structure affine sur $\mathcal{E}$ est équivalente à la donnée de l'action de E sur $\mathcal{E}$ - la donnée d'une famille de "translations" T_v, $v \in E$, vérifiant les propriétes (i) et (ii).

.

Repère affine. Coordonnées affines

1.5. Définition. Soit dim $\mathcal{E} = n$. On appelle **repère affine** de $\mathcal{E}$ la donnée de $n+1$ points $A_0, ..., A_n$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_n}$ forment une base de E.

Soit $e_i = \overrightarrow{A_0A_i}$. De manière équivalente, le repère affine est donné par le choix de "l'origine" A_0 et d'une base $(e_1, ..., e_n)$ de E.

L'origine A_0 permet d'identifier $\mathcal{E}$ et E; la base $(e_1, ..., e_n)$ donne un système de coordonnées dans E, donc un système de coordonnées dans $\mathcal{E}$.

Plus précisement, au point B on associe les coordonnées (x_i) du vecteur $\overrightarrow{A_0B} = \sum_i x_i e_i$.

Tout point B de $\mathcal{E}$ admet donc l'expression unique: $B = A_0 + \sum_i x_i e_i$.

.

Barycentres (combinaisons affines)

Soit $v \in E$ et $A \in \mathcal{E}$. La **droite** passant par A dirigée par v est l'ensemble de points $M = A + \lambda v$, $\lambda \in R$. La droite passant par deux points A et B est dirigée par le vecteur $v = \overrightarrow{AB}$; ses points sont $M = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda \in R$.

Choisissons une "origine" O. Alors $M = A + \lambda\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = \mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ avec $\lambda + \mu = 1$. On appelle M le **barycentre** des points A et B affectés de poids μ et λ.

1.6. Lemme. Soit $A_1, ..., A_k$ des points affectés des poids $\lambda_1, ..., \lambda_k$, tels que $\sum_i \lambda_i \neq 0$. Il existe un unique point M tel que pour tout $O \in \mathcal{E}$ on a

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_i \lambda_i} \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

1.7. Définition. Le point M défini dans le lemme s'appelle le **barycentre** des points $A_1, ..., A_k$ affectés des coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_k$.

Remarque. Si on pose $O = M$, on a la caractérisation suivante du barycentre: c'est l'unique point M tel que $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = 0$.

On notera $M = Bar\{(\lambda_i, A_i)\}$. Si $\sum_i \lambda_i = 1$, on adopte souvant la notation $M = \sum_i \lambda_i A_i$.

Si $\mathcal{E} = E$, le barycentre v des vecteurs $u_1, ..., u_k$ affectés des poids $\lambda_1, ..., \lambda_k$ est $v = \frac{1}{\sum_i \lambda_i} \sum_i \lambda_i u_i$.

Vu que v est une combinaison linéaire des vecteurs u_i, on peut appeler le barycentre "combinaison affine des points A_i".

En particulier, si $\sum_i \lambda_i = 1$, alors $v = \sum_i \lambda_i u_i$. (Comparer avec la notation pour le barycentre: $M = \sum_i \lambda_i A_i$.)

.

1.8. Coordonnées barycentriques.

Soit $(A_0, ..., A_n)$ (ou $(A_0; e_1, ..., e_n)$ avec $e_i = \overrightarrow{A_0A_i}$,) un repère affine, soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées du point M: $\overrightarrow{A_0B} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

.

Soit $x_0 = 1 - \sum_1^n x_i$. Alors $B = Bar\{(x_i, A_i)_{0 \leq i \leq n}\} = \sum_{i=0}^n x_i A_i$.

Les $n+1$ coordonnées $(x_0, x_1, ..., x_n)$ sont les **coordonnées barycentriques** de M dans le repère $(A_0, ..., A_n)$. Noter que $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$.

Donc $(A_0, ..., A_n)$ est un repère affine si et seulement si tout point $B \in \mathcal{E}$ s'écrit de façon unique comme un barycentre des points $A_0, ..., A_n$. Cela rend la définition du repère affine plus symétrique: une permutation des points du repère définit aussi un repère.

La propriété suivante de "l'associativité du barycentre" est très utile.

1.9. Proposition. Supposons qu'on a une partition de l'ensemble des indices $I = \{1, ..., n\}$ en k parties disjointes: $I = I_1 \cup ... \cup I_k$. Soit $A_1, ..., A_n \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des poids tels que $\sum_i \lambda_i \neq 0$ et $\mu_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_i \neq 0$, $j = 1, ..., k$. Soit B_l le barycentre des points du j-ème groupe: $B_j = Bar\{(\lambda_i, A_i)_{i \in I_j}\}$.

Alors $Bar\{(\lambda_i, A_i)\} = Bar\{(\mu_j, B_j)\}$.

.

Sous-espace affine

1.10. Définition. Une partie non-vide $\mathcal{F}$ de l'espace affine $\mathcal{E}$ est un **sous-espace affine** si avec tout ses deux points $\mathcal{F}$ contient la droite passant par ces deux points.

1.11. Lemme. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

(ii) Si $A_1, ..., A_k \in \mathcal{F}$ alors tout barycentre des points $A_1, ..., A_k$ est dans $\mathcal{F}$. (Toute combinaison affine des points de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$.)

(iii) Pour tout $O \in \mathcal{F}$ l'ensemble $F = \{\overrightarrow{OM}, M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. De cette façon, *$\mathcal{F}$ est à son tour un espace affine dirigé par F.*

(iv) $\mathcal{F} = \{O + v, v \in F\}$ où F est un sous-espace vectoriel de E et O un point de $\mathcal{F}$.

Une *droite* est un sous-espace affine de dimension 1.

Un *hyperplan* est un sous-espace affine de codimension 1 (de dimension $\dim(\mathcal{E}) - 1$).

1.12. Lemme. L'intersection non-vide d'une famille de sous-espaces affines est un sous-espace affine.

.

1.13. Représentation paramétrique d'un sous-espace.

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine dirigé par F; soit $O \in \mathcal{F}$ et $(v_1, ..., v_k)$ une base de F. On a donc un repère affine de $\mathcal{F}$ et tout point B de $\mathcal{F}$ admet l'expression unique: $B = O + \sum_{i=1}^{k} s_i v_i$, $(s_1, ..., s_k) \in R^k$.

Soit $(x_1, ..., x_n)$ un système de coordonnées affines dans $\mathcal{E}$. Soit $(c_1, ..., c_n)$ les coordonnées du point O et $(a_{1i} ..., a_{ni})$ les coordonnées du vecteur v_i. Alors les coordonnées du point $B = O + \sum_{i=1}^{k} s_i v_i$ sont $x_j = c_j + \sum_{i=1}^{k} a_{ji} s_i$, $j = 1, ..., n$.

Position relative de deux sous-espaces

1.14. Lemme. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces de $\mathcal{E}$ d'intersection non-vide. Alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est dirigé par $F \cup G$.

Corollaire. $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est un seul point si et seulement si les sous-espaces F et G sont supplémentaires.

On dit que deux sous-espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ sont **parallèles** si $F \subset G$ ou $G \subset F$. On conclut dans ce cas que soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont disjoints, soit l'un contient l'autre.

.

Sous-espace affine engendré par une partie.

Soit $S \subset \mathcal{E}$ une partie non-vide. Le sous-espace affine engendré par S, noté Aff(S), est l'intersection de tous les sous-espaces affines qui contiennent S.

1.15. Lemme. Aff(S) est l'ensemble de toutes les combinaisons affines (barycentres) des points de S.

1.1§. Lemme. Soit $O \in S$ et soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $A \in \mathcal{E}$. Alors l'espace directeur de Aff(S) est F: Aff$(S) = \{O + v, v \in F\}$.

1.17. Corollaire. $(A_0, ..., A_n)$ est un repère affine si et seulement si $n = \dim \mathcal{E}$ et Aff$(A_0, ..., A_n) = \mathcal{E}$.

.

2. Applications affines.

2.1. Définition. Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est **affine** si $f(\lambda A + \mu B) = \lambda f(A) + \mu f(B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{E}$ et tout λ, μ tels que $\lambda + \mu = 1$.

2.2. Lemme. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine.

(ii) f conserve les barycentres: $f(Bar\{(\lambda_i, A_i)\}) = Bar\{(\lambda_i, f(A_i))\}$.

(iii) Pour un point $A \in \mathcal{E}$ l'application $df : E \to F$ défini par $df(v) = \overrightarrow{f(A)f(A+v)}$ est linéaire.

(iv) Pour tout point A on a $f(A+v) = f(A) + df(v)$ où $df : E \to F$ est une application linéaire.

(v) f est différentiable et sa différentielle $df : E \to F$ est constante sur $\mathcal{E}$.

(vi) Si par le choix des origines $O \in \mathcal{E}$ et $O' \in \mathcal{F}$ on identifie $\mathcal{E}$ avec E et $\mathcal{F}$ avec F, alors $f(v) = a + df(v)$: "une application affine est une application linéaire plus une constante".

.

La formule du rang pour les applications linéaires s'adapte aux applications affines: Soit $B \in Im(f)$. Alors dim $(\mathcal{E})$ =dim (Imf)+ dim $(f^{-1}(B))$.

2.3. Lemme. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. Alors

(i) Soit $\mathcal{E}_1$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$; alors $f(\mathcal{E}_1)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$.

(ii) Soit $\mathcal{F}_1$ un sous-espace affine de $\mathcal{F}$; alors $f^{-1}(\mathcal{F}_1)$, si non-vide, est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

Fonction affine $f : \mathcal{E} \to R$. Dans un système de coordonnées affines f s'écrit $f(x_1, ..., x_n) = c + \sum_i a_i x_i$.

Equation d'un hyperplan: tout hyperplan est défini par une équation affine $\sum_i a_i x_i = c$.

Ecriture en coordonnées. Fixons les repères affines R dans $\mathcal{E}$ et R' dans $\mathcal{F}$.

Soit $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées du point M dans R et $(y_1, ..., y_k)$ les coordonnées de $f(M)$ dans R'.

Alors $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, où (a_{ij}) est la matrice de df dans les bases des repères R, R'.

.

"Combinaison affine" des applications affines.

Soit $f_i : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, $i = 1, ..., k$ des applications affines et $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$.

On définit $f = \sum_i \lambda_i f_i$ par $f(A) = \sum_i \lambda_i f_i(A)$ (barycentre).

Exercice: définir une structure de l'espace affine dans l'ensemble de toutes les applications affines $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$.

.

Applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Transformations affines.

.

Les propriérés d'une application affine f sont déterminées par les propriétés de sa différentielle df.

Lemme. $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une translation si et seulement si $df = Id$.

2.4. Proposition. **(i)** Si df n'admet pas de vecteur fixe non-nul (donc si 1 n'est pas une valeur propre de df), alors f admet un unique point fixe.

(i) Si df admet des vecteurs fixes non-nuls, (donc si 1 est une valeur propre de df), alors l'ensemble des points fixes de f est soit vide soit de même dimension que le sous-espace des vecteurs fixes de df.

Si on prend le point fixe $O = f(O)$ pour origine, f s'écrit $f(O + v) = O + df(v)$: donc, en vectorialisant $\mathcal{E}$ en O, on identifie f avec l'application linéaire df.

2.5. Définition. f est une **homothétie** de centre O et de rapport k si $f(O) = O$ et $df = kId$.

Corollaire. Si $df = kId$ avec $k \neq 1$, alors f est une homothétie.

Projections et symétries affines. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et soit G un sous-espace vectoriel de E supplémentaire à F : $E = F \oplus G$.

Soit $\Pi : E \to E$ le projecteur vectoriel sur F parallèlement à G.

2.6. Définition. La projection affine p sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G est définie par les conditions $p(O) = O$ si $O \in \mathcal{F}$ et $dp = \Pi$;

donc $p(M) = O + \Pi(\overrightarrow{OM})$.

Lemme. f est un projecteur affine si et seulement si $f \cdot f = f$.

Soit $\sigma : E \to E$ la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G: $\sigma(v) = v$ si $v \in F$ et $\sigma(v) = -v$ si $v \in G$.

2.7. Définition. La **symétrie affine** s par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G est définie par les conditions $s(O) = O$ si $O \in \mathcal{F}$ et $ds = \sigma$; donc $p(M) = O + \sigma(\overrightarrow{OM})$.

Lemme. s est une symétrie affine si et seulement si $f \cdot f = Id$.

.

3. Espaces affines euclidiens

3.1. Définition. Un espace affine $\mathcal{E}$ est dit **euclidien** s'il est dirigé par une espace vectoriel euclidien E.

On définit la distance dans $\mathcal{E}$ par $d(A, B) = \| \overrightarrow{AB} \|$.

3.2. Définition. Un repère affine $(A_0, a_1, ..., A_n)$ est dit **orthonormé** si la base vectorielle $(\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_n})$ est orthonormée.

3.3. Définition. Deux sous-espaces affine $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **orthogonaux** si leurs espaces directeurs F et G sont orthogonaux.

.

Isométries

3.4. Définition. Soit X eu espace métrique. On appelle **isométrie** de X une bijection $f : X \to X$ qui préserve la distance: $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$.

3.5. Proposition. Toute isométrie d'un espace affine euclidien est une application affine.

3.6 Lemme. Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie si et seulement si $df : E \to E$ est une isométrie vectorielle.

3.7. Définition. On appelle **déplacement** ou *isométrie directe* (respectivement, **antidéplacement** ou *isométrie indirecte* de $\mathcal{E}$ toute isométrie f telle que dét$(df) = 1$ (respectivement, dét$(df) = -1$).

Les translations sont évidemment des déplacements.

3.8. Définition. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. La **projection orthogonale** sur $\mathcal{F}$ est la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $F^{\perp}$. La **symétrie orthogonale** par rapport à $\mathcal{F}$ est la symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $F^{\perp}$.

On appelle **reflexion** une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Les réflexions sont des antidéplacements.

Etant donné deux points A et B de $\mathcal{E}$, il existe une unique réflexion échangeant A et B: c'est la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur du segment $[AB]$.

Vu que toute isométrie vectorièle dans R^n s'écrit comme un produit d'au plus n réflexions, on a :

3.9. Proposition. Toute isométrie affine de $\mathcal{E}$ s'écrit comme un produit d'au plus $n+1$ réflexions ($n = \dim(\mathcal{E})$.)

3.10. Définition. Une transformation affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une **similitude** de rapport k si f multiplie toutes les distances par k:

$d(f(x), f(y)) = kd(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{E}$.

Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $\mid k \mid$.

3.11. Lemme. **(i)** Toute similitude de rapport $k \neq 1$ admet un point fixe.

(ii) Toute similitude de rapport k est la composée d'une homothetie de rapport k et d'une isométrie.

.

Classification des isométries en dimension 2 et 3.

La classification des isométries affines repose sur la classifcation des isométries vectorielles. Soit U une isométrie de l'espace vectoriel E.

dim $E = 2$**.** a) dét $U = 1$: U est une rotation.

b) dét $U = -1$: U est une réflexion.

dim $E = 3$**.** a) dét $U = 1$: U est une rotation autour d'un axe.

b) dét $U = -1$: U est une réflexion composée avec une rotation autour de l'axe orthogonal au plan de réflexion.

.

Isométries affines du plan

4.1. Proposition. **(i)** Tout déplacement du plan est une translation ou une rotation autour d'un point.

(ii) Toute antidéplacement est le produit d'une réflexion par rapport à une droite avec une translation parallèle à cette droite (une "réflexion-translation").

Isométries affines de l'espace.

4.2. Proposition. **(i)** Tout déplacement de l'espace est soit une translation soit le produit (commutatif) d'une rotation autour d'un axe et d'une translation parallèle à l'axe de rotation ("vissage").

(ii) Toute antidéplacement est soit le produit (commutatif) d'une réflexion par rapport à un plan avec une translation parallèle à ce plan ("réflexion-translation"), soit le produit (commutatif) d'une réflexion par rapport à un plan avec une rotation autour d'un axe orthogonal à ce plan ("réflexion-rotation").

Similitudes planes et nombres complèxes.

On identifie le plan euclidien R^2 avec le plan complèxe $\mathbf{C}$.

4.3. Proposition. Toute similitude directe de $\mathbf{C}$ s'écrit $s(z) = az + b$, avec $a \neq 0$. Toute similitude indirecte s'écrit $s(z) = a\bar{z} + b$, $a \neq 0$.

Le rapport d'une telle similitude est $\mid a \mid$.

En particulier, c'est une isométrie si et seulement si $\mid a \mid = 1$.