CPGEI Automne 2012 Nombres Réels

Exercice 1 Soient a et b deux nombres réels vérifiant : $-1 < a < 4$ et $-3 < b < -1$. Donner un encadrement de $a + b$, $a - b$, $a.b$, $\frac{a}{b}$.

Exercice 2 Soient a et b deux réels. Montrer $\left| |a| - |b| \right| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$

Exercice 3 Montrer que, pour tout $n \in N$, $n \neq 0$, $\left| \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2}$

Exercice 4 Soit $x > 0$: Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $(1+x)^n > 1 + nx$.

Exercice 5 Soit A une partie de R. A-t-on équivalence entre les deux propositions suivantes :

- $\exists \propto > 0 , \forall x \in A , x \geq \propto$
- $\forall x \in A , x > 0$

Exercice 6 Les propositions suivantes sont elles vraies :

- $\forall x \in R, (\forall \varepsilon > 0,\ x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$
- $\forall x \in R, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$
- $\forall x \in R, \left(\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon\right) \Rightarrow x = 0$

Exercice 7 Etant donné un ensemble $A \subseteq R$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

- 10 est un majorant de A
- 10 est la borne supérieure de A
- m est la borne inférieure de A
- P n'est pas un majorant de A
- A est majoré
- A n'est pas minoré

Exercice 8 Soient A et B deux sous ensembles non vides et majorés de R.Montrer que :

1 - $A \subseteq B \Rightarrow Sup\ A \leq Sup\ B$

2- $A \cup B$ admet une borne supérieure et Sup $A \cup B$ $=$ Max $(Sup\ A , Sup\ B)$.

3- On note $A + B$ l'ensemble des éléments de R qui s'écrivent x+y, $x \in A$, $y \in B$.
Montrer que $Sup(A+B)$ existe et que $Sup(A+B) = SupA + SupB$.

4- Ici on suppose A et B sous ensembles non vides et majorés de R_+^* ; On note AB l'ensemble des éléments qui s'écrivent xy , $x \in A$, $y \in B$. Justifier l'existence de $Sup(AB)$ et que $Sup(AB) = Sup\ A\ Sup\ B$.

5- Soit A un sous-ensemble non vide et minoré de R. On note $-A = \{ -x , x \in A \}$.Montrer que $Sup\left(-A\right) = -Inf\ A$

Exercice 9 Soient A et B deux sous ensembles non vides de R tels que

$\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$. Montrer que Sup A et Inf B existent et que Sup A $\leq$ Inf B.

<u>Exercice 10</u> a- Soit A = { xy , (x,y) $\in R^{+}$x R^{+} et $x^2+ y^2 \leq 2$ } . Justifier l'existence de Inf A , de $Sup\ A$ et leur valeur .

b- Même question avec B = {$x^2+ y^2$, (x, y) $\in R$ x R et xy = 1 }.

<u>Exercice 11</u> Soit A = {$(-1)^n+\frac{1}{n}$, n $\in N^*$}. Préciser borne inférieure et supérieure.

<u>Exercice 12</u> Soit D = { $\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}$, n $\in N^*$ }. Préciser borne inférieure et supérieure.

<u>Exercice 13</u> Soit A = {$\frac{m}{mn+1}$, $m \in N, n \in N^*$ } .Montrer que 1 est un majorant de A et 0 un minorant puis que $Sup\ A = 1$ et Inf A $= 0$. 1 est il le plus grand élément de A ? 0 est-il son plus petit élément ?

<u>Exercice 14</u> Partie Entière d'un réel x.

1- Tracer le graphe de la fonction f(x) = [$2x$] pour $x \in$ [-1,+1].
2- Montrer que pour tout x et y de R , on a $[x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1$.
3- Soit n un entier relatif et x un réel :Est-il vrai que [n x] = n[x] ?[n+x]=n+[x] ?
4- Soit n $\in N^*$ et x un réel. Montrer $[x] = [\frac{[nx]}{n}]$

<u>Exercice 15</u>

- $(x \in Q, y \in Q) \Rightarrow$ x + y $\in Q$: Vrai ou Faux ?
- $(x \in R\backslash Q , y \in R\backslash Q) \Rightarrow$ x + y $\in$ R\Q : Vrai ou Faux ?
- Soit $r \in Q , x \in R\backslash Q$: montrer que r+x $\notin Q$ et que si r$\neq 0$, $rx \notin Q$.
- Soient x et y des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels :

  montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.
- Que signifie « Q est dense dans R » ? Montrer que $R\backslash Q$ est également dense dans R.

<u>Exercice 16</u>

Soit f : $R \to R$ telle que $\forall (x,y) \in Q^2$, f(x+y)=f(x) + f(y). On pose f(1)= λ .

Montrer que $\forall n \in N, f(n) = n\lambda$

Montrer que $\forall n \in Z , f(n) = n\lambda$

Montrer que $\forall n \in N^* , f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\lambda}{n}$ et en déduire que $\forall\ x \in Q, f(x) = \lambda\ x$

Montrer que $\forall x \in Q$ f(x) = λx.

On suppose ici, de plus, f croissante : Montrer qu'alors $\forall x \in R$ f$(x) = \lambda\ x$.

[Indications : Soit x fixé. Etudier A_x = {a $\in Q$, $a \leq x$} : sa borne sup est x et $\frac{1}{\lambda} f(x)$ majore A_x d'où $f(x) \geq \lambda x$. Puis envisager $-x$]