Chap 5

Réduction algébrique

I Polynômes d'endomorphisme.

1) Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u^k = u \circ \dots \circ u$ (k fois)

et $u^0 = id$.

Si $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, alors on pose

$$P(u) = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k.$$

C'est encore un endomorphisme de E.

Une $\mathbb{K}$-algèbre : $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ sur un corps $\mathbb{K}$ tq $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un e.v., et en plus un produit interne $\times$, avec les règles usuelles : associatif, distributif sur $+$ et c'est tout... pas forcément d'unité, pas forcément commutatif...

La plupart du temps l'algèbre a une unité : $\mathbb{1}_{\mathcal{A}} B = B \mathbb{1}_{\mathcal{A}} = B$, $\forall B \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{L}(E)$ est une algèbre, $M_n(\mathbb{K})$ aussi, $\mathbb{K}[X]$ aussi.

Proposition

L'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ est un morphisme d'algèbre
$P \longmapsto P(u)$

Dem

$\varphi_u(1) = id_E$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, $Q(X) = \sum_{k=0}^{M} b_k X^k$.

On peut supposer $M = N$ quitte à rajouter des coeffs nuls.

$\varphi_u(\lambda P + \mu Q) = \varphi_u\left(\sum_{k=0}^{N} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k\right) = \sum_{k=0}^{N} (\lambda a_k + \mu b_k) u^k$

$= \lambda \sum a_k u^k + \mu \sum b_k u^k = \lambda \varphi_u(P) + \mu \varphi_u(Q)$.

$\varphi_u(PQ) = PQ(u) = \left[\sum a_k \left(X^k Q(X)\right)\right](u)$

$= \sum_k a_k (X^k Q)(u)$ car φ_u linéaire.

Mais $(X^k Q)(u) = \left[\sum_\ell b_\ell X^{k+\ell}\right](u) = \sum_\ell b_\ell u^{k+\ell} = u^k \circ Q(u)$

$\Rightarrow (PQ)(u) = \sum_k a_k u^k \circ Q(u) = P(u) \circ Q(u) = \varphi_u(P) \circ \varphi_u(Q)$. $\blacksquare$

Rem : Toute identité polynomiale se transpose aux endomorphismes.
Par exemple, $X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2+X-1) \Rightarrow u^3 - 2u + id_E = (u - id_E) \circ (u^2 + u - id_E)$.

2) Polynôme d'endomorphisme

On dit que $v \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme en $u \in \mathcal{L}(E)$, s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $v = P(u)$.

On note $\mathbb{K}[u]$ l'ens. des pol. en u :

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Thm

$\mathbb{K}[u]$ est une sous-alg. commutative de $\mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{A}$ est une sous-alg. de $\mathcal{L}(E)$ tq $u \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{A}$.

Ainsi $\mathbb{K}[u]$ est la plus petite sous-alg de $\mathcal{L}(E)$ qui contient u, on dit que c'est l'alg. engendrée par u.

Dem

$\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{L}(E)$, $id_E \in \mathbb{K}[u]$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v, w \in \mathbb{K}[u]$, alors $v = P(u)$, $w = Q(u) \Rightarrow \lambda v + \mu w = (\lambda P + \mu Q)(u) \in \mathbb{K}[u]$ et $v \circ w = (PQ)(u) \in \mathbb{K}[u]$. Donc $\mathbb{K}[u]$ est une sous-alg. de $\mathcal{L}(E)$.

Elle est commutative car $(PQ)(u) = (QP)(u)$.

Si $\mathcal{A} \ni u$, alors $u^n \in \mathcal{A}$ $\forall n$, puis

$$\mathbb{K}[u] = \text{vect}\{u^n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}. \qquad \blacksquare$$

Rem Si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $\text{Im}\, P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par u car $P(u)$ et u commutent.

3) Polynôme annulateur.

On appelle polynôme annulateur de u, tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(u) = 0$

Exemple : soit u un projecteur, alors $X^2 - X$ annule u.

Thm

L'ens. des pol. annul. de u est un e.v. et un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

<u>Dem</u> Soit $I = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\}$. Alors I est le noyau de l'endom φ_u, donc c'est un e.v.

Comme φ_u est un morphisme d'algèbre alors $I = \ker \varphi_u$ est un idéal : Si $P \in I$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $\varphi_u(QP) = \varphi_u(Q)\varphi_u(P) = 0$.

<u>Remarque</u> : Si P annule u et $P | Q$ alors Q annule u.

<u>Thm</u>

> Les valeurs propres de u sont incluses dans les racines des poly. annulateurs de u.

<u>Dem</u>

Si $P(u) = 0$ et λ v.p. de u, alors $P(\lambda)$ est v.p. de $P(u)$ et donc $P(\lambda) = 0$. $\blacksquare$

<u>Rem</u> : Les racines de P annulateur ne sont pas toutes forcément des v.p. de u.

<u>Exemple</u> : u projection $\Rightarrow X^2 - X$ annulateur, on retrouve $Sp(u) \subset \{0,1\}$.

u nilpotent $\Rightarrow X^n$ annulateur $\Rightarrow Sp(u) \subset \{0\}$.

II Polynôme d'une matrice.

1) Valeur

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$, alors

$$P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k \quad (M^0 = I_n).$$

- Si $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $M^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$, même pour $k=0$.

$\Rightarrow P(M) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$.

- Si $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $M^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ et donc

$P(M) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & *'' \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$.

- Si $M = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ alors $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$

- Notez que $\boxed{{}^tP(M) = P({}^tM)}$

Thm

L'application $\varphi_M : \mathbb{K}[X] \to M_n(\mathbb{K})$, $P \mapsto P(M)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-alg.

2) Polynôme en une matrice (carrée)

On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est un polynôme en $M \in M_n(\mathbb{K})$ si $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tq $A = P(M)$. On note $\mathbb{K}[M]$ l'ens. des polynômes en M.

Thm

$\mathbb{K}(M)$ est une sous-alg. commutative de $M_n(\mathbb{K})$. Elle est incluse dans toute sous alg. contenant M.

3) Polynôme annulateur.

Idem : P tq $P(M) = 0$.

Rem $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $X^2 - (a+d)X + ad - bc$ est annulateur de M. (ex).

Rem

$$\boxed{P(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P(A)Q}$$

(exercice).

Prop

Si A et B sont semblables alors elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

Thm

L'ens. des pol. annul. de M est un s.e.v. et un idéal de $M_n(\mathbb{K})$.

Si P annule M et $P | Q$ alors Q annule M.

4) V.p. et pol. annul.

Thm

$\boxed{\text{Les v.p. de } M \subset \text{racines du pol. annul. de } M.}$

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ tq $A^3 = I$.

Alors $X^3 - 1$ annule A. Mais dans $\mathbb{R}[X]$ $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$

$\Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1\}$. Mais $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ car de taille impaire.

$\Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$.

Dans $\mathbb{C}$, $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2) \Rightarrow Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, j, j^2\}$.

Les v.p. de A sont 2 à 2 conjuguées et $1 \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow$

$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$ ou bien $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{1, j, j^2\}$.

χ_A est forcément scindé dans $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}(A) = 3$ ou 0 et $\det A = 1$.