1) a) Récurrence pas bien compliquée.

b) On applique la formule qui précède à $\alpha = -1/2$, on remarque que $f(x) = \phi_\alpha(1-x)$ et donc que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \phi_\alpha^{(n)}(1-x)$. On obtient :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1+2n}{2}} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}(1-x)^{-\frac{1+2n}{2}}$$

c) Dans un second temps on applique cette identité à 0. On obtient :

$$f^{(n)}(0) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}$$

Au vu de ce qu'on doit trouver, et tout spécialement de son numérateur, on a l'idée de multiplier en haut et en bas par le produit $2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n$. Après cette multiplication, le numérateur est devenu $(2n)!$: nous sommes sur la bonne piste. Pour ce qui est du dénominateur, on remarque que $2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n = (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdots(2\cdot n) = 2^n\, n!$. Le dénominateur obtenu à la fin est bien celui qui était attendu.

2) a) Soit v la fonction dérivable définie sur $]-1,1[$ par $v(x) = u(-x)$. Sa dérivée est donnée par $v'(x) = -u'(-x)$.

Si u est paire, pour tout x dans $]-1,1[$, $v(x) = u(x)$ donc $u = v$ donc $u' = v'$, donc pour tout x, $u'(x) = -u'(-x)$: u' est donc impaire. L'autre cas se traite de la même façon ;

b) $g^{(0)} = g$ est évidemment paire, et d'après le résultat qui précède, $g^{(1)} = g'$ est impaire. Ceci invite à prouver par récurrence sur l'entier $k \geq 0$ l'hypothèse :

$$(H_k) \qquad g^{(2k)} \text{ est paire et } g^{(2k+1)} \text{ est impaire}$$

ce qui se déroule si facilement que je ne le fais pas dans ce corrigé.

c) Une fonction impaire s'annule en 0, donc toutes les dérivées d'ordre impair de g s'annulent en 0. Ceci prouve que pour tout $k \geq 0$, $g^{(2k+1)}(0) = 0$.

3) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}$. Si $k < n/2$, alors $2k-n < 0$ donc $\varphi(2k-n) = 0$ donc $2^{2k-n}\, n!\varphi(n-k)\varphi(2k-n) = 0$ et par ailleurs $c(n,k) = 0$. Les cas où $n/2 \leq k \leq n$ et où $n < k$ se traitent de façon analogue.

4) Soit $m \in \mathbf{Z}$. Si $m < 0$, les deux valeurs $\varphi(m-1)$ et $\varphi(m)$ sont nulles, donc l'identité est vraie. Si $m = 0$, $\varphi(-1) = 0 = 0\varphi(0)$ et ça marche aussi. Enfin si $m > 0$, $m\varphi(m) = m/m! = 1/(m-1)! = \varphi(m-1)$.

5) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned}
&2c(n,k-1) + (2k-n)c(n,k)\\
=&2 2^{2k-n-2}\, n!\varphi(n-k+1)\varphi(2k-n-2) + (2k-n)2^{2k-n}\, n!\varphi(n-k)\varphi(2k-n)\\
=&2^{2k-n-1}\, n![\varphi(n-k+1)\varphi(2k-n-2) + 2\varphi(n-k)(2k-n)\varphi(2k-n)]\\
=&2^{2k-n-1}\, n![\varphi(n-k+1)\varphi(2k-n-2) + 2\varphi(n-k)\varphi(2k-n-1)]\\
=&2^{2k-n-1}\, n![\varphi(n-k+1)(2k-n-1)\varphi(2k-n-1) + 2(n-k+1)\varphi(n-k+1)\varphi(2k-n-1)]\\
=&2^{2k-n-1}\, n![2k-n-1+2n-2k+2]\varphi(n-k+1)\varphi(2k-n-1)\\
=&2^{2k-n-1}\,(n+1)!\varphi(n-k+1)\varphi(2k-n-1)\\
=&c(n+1,k)
\end{aligned}$$

6) On va montrer par récurrence sur $n \geq 0$ l'énoncé (H_n) suivant :

$$(H_n) \qquad \text{Pour tout } x \in]-1,0[\cup]0,1[,\, g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^{2k-n}f^{(k)}(x^2).$$

* Initialisation : Au vu de sa définition $c(0,0) = 1$. Pour chaque x de $]-1,0[\cup]0,1[$, le membre de droite de l'identité qui figure dans (H_0) vaut donc $1x^0 f^{(0)}(x^2) = f(x^2) = g(x) = g^{(0)}(x)$.

* Hérédité : soit n un entier positif ou nul, supposons (H_n) vraie. L'identité qui y figure étant supposée vraie en tout point de $]-1,0[\cup]0,1[$, on peut la dériver sur celui-ci et on obtient, pour tout x de $]-1,0[\cup]0,1[$:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} c(n,k)(2k-n)x^{2k-n-1}f^{(k)}(x^2) + \sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^{2k-n}(2x)f^{(k+1)}(x^2) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(2k-n)c(n,k)x^{2k-n-1}f^{(k)}(x^2) + \sum_{k=0}^{n} 2c(n,k)x^{2k-n+1}f^{(k+1)}(x^2) \end{aligned}.$$

En remarquant que $c(n,n+1)=0$ et $c(n,-1)=0$ on peut ajouter deux termes nuls à la dernière identité qui devient :

$$g^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1}(2k-n)c(n,k)x^{2k-n-1}f^{(k)}(x^2) + \sum_{k=-1}^{n} 2c(n,k)x^{2k-n+1}f^{(k+1)}(x^2)\,.$$

On fait le changement de variable $l=k$ dans la première somme, et le changement $l=k+1$ dans la deuxième. On obtient :

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \sum_{l=0}^{n+1}(2l-n)c(n,l)x^{2l-n-1}f^{(l)}(x^2) + \sum_{l=0}^{n+1} 2c(n,l-1)x^{2l-n-1}f^{(l)}(x^2) \\ &= \sum_{l=0}^{n+1}[(2l-n)c(n,l)+2c(n,l-1)]x^{2l-n-1}f^{(l)}(x^2) \\ &= \sum_{l=0}^{n+1} c(n+1,l)x^{2l-(n+1)}f^{(l)}(x^2) \end{aligned}.$$

On a ainsi prouvé (H_{n+1}).

7) On explicite (H_{2m}) et on constate avoir à peu près obtenu le résultat demandé, à ceci près que la sommation commence à $k=0$ alors qu'on nous demande une sommation débutant à $k=m$.

Mais, par définition de l'expression $c(2m,k)$ celle-ci est nulle pour les valeurs de k strictement inférieures à $2m/2=m$. Les termes dont diffèrent l'expression connue et l'expression à montrer sont donc tous nuls.

8) Pour chaque valeur de k figurant dans la somme écrite à la question précédente, $f^{(k)}(x^2)$ tend vers $f^{(k)}(0)$ quand x tend vers 0. Pour ce qui est de x^{2k-2m}, il tend vers 0 si $m<k$ tandis qu'il vaut 1 et donc tend vers 1 si $m=k$. La somme tend donc vers $c(2m,m)f^{(m)}(0)$ accompagné d'une somme de zéros. Du côté gauche de l'identité de la question précédente, on tend par ailleurs vers $g^{(2m)}(0)$. On conclut donc que $g^{(2m)}(0)=c(2m,m)f^{(m)}(0)$. Yapluka constater que $c(2m,m)$ vaut $(2m)!/m!$.

9) g est la dérivée de Arcsin. Dès lors, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$:

$$\mathrm{Arcsin}^{(n)}(0) = g^{(n-1)}(0).$$

Les $g^{(i)}(0)$ d'indice impair sont nuls, donc pour tout $k\geq 1$:

$$\mathrm{Arcsin}^{(2k)}(0) = g^{(2k-1)}(0) = 0,$$

formule également vraie pour $k=0$ de façon évidente. Enfin pour tout $k\geq 0$:

$$\mathrm{Arcsin}^{(2k+1)}(0) = g^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!}{k!}\,f^{(k)}(0) = \frac{[(2k)!]^2}{4^k(k!)^2}.$$

10) On peut développer h^2 comme un bovin, et on attendait ça de vous. Si on est plus joueur, on peut introduire la fonction k définie sur $]-\infty,\frac{1}{4}[$ par :

$$k(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}$$

puis remarquer que pour tout x fixé, $h(x)+k(x)=1$ tandis que $h(x)k(x)=x$.
Le réel $h(x)$ est donc solution de l'équation du second degré d'inconnue notée X suivante :

$$X^2 - X + x = 0$$

et écrire qu'il en est solution, c'est écrire $(*)$.

11) On dérive $(*)$ n fois en utilisant la formule de Leibniz dans le membre de gauche. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(k)}(0) h^{(n-k)}(0) = h^{(n)}(0)$$

En remarquant que $h^{(0)}(0) = h(0) = 0$, on peut modifier les bornes de la sommation dont les deux termes extrêmes sont nuls ; en écrivant les dérivées en fonction des c_i on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k!\, c_k (n-k)!\, c_{n-k} = n!\, c_n$$

et enfin, si on se souvient que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

on trouve le résultat demandé.

12) Étant donné un parenthésage d'un mot de n lettres, on peut lui associer un entier k compris entre 1 et $n-1$: c'est le nombre de lettres qui précèdent la dernière opération effectuée dans le calcul qui obéit à cette règle de parenthésage. Dans l'énumération donnée en exemple, $k=1$ sur les deux premiers parenthésages (on multiplie a par quelque chose), $k=2$ dans le second (on multiplie ab par quelque chose) et $k=3$ dans les deux derniers (on multiplie une expression forgée sur abc par d). Pour une valeur fixée de k le nombre de parenthésages où la dernière multiplication intervient après la k-ème lettre est alors égal au nombre de façons de parenthéser la première partie du mot multiplié par le nombre de façons de parenthéser la deuxième partie, c'est-à-dire à $d_k d_{n-k}$. Le nombre total de parenthésages d'un mot de n lettres s'obtient alors en sommant ces produits sur k variant entre 1 et $n-1$: c'est bien l'expression annoncée.

13) Simple récurrence sur $n \geq 1$: on a besoin de l'initialier en explicitant $c_1 = 1$ et en le comparant à $d_1 = 1$. L'incrémentation fonctionne sans problème, dès lors que les deux suites c_i et d_i vérifient, au vu des questions 8 et 9, une même relation de récurrence.

14) a) La relation est $h'(x) = f(4x)$ d'où on déduit pour tout $n \geq 1$ que $h^{(n)}(x) = 4^{n-1} f^{(n-1)}(4x)$. On n'a plus qu'à évaluer en 0 puis diviser par $n!$.

b) On repêche a_{n-1} de la question 2c) et on le reporte dans l'égalité de la question précédente, où on remplace c_n par d_n au vu de la question 10, on obtient :

$$d_n = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}.$$

Si on met au même dénominateur les deux coefficients binomiaux de la formule proposée (faites le !) on obtient par ailleurs également :

$$\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2} = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}.$$

D'où le résultat.