Problème 4-CCP

Exercice 1.

1. Pour tout nombre premier p et pour tout k, $1 \leq k \leq p-1$, montrer que : p divise $\binom{p}{k}$.

   On pourra montrer que montrer que :
$$\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$$
2. Soit p un nombre premier, montrer par récurrence sur $a \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a \quad [p]$.
   Expliciter le cas $a = 0$. Puis montrer que ce résultat reste vrai pour $a < 0$ (on posera $b = -a > 0$).
3. Soit p un nombre premier, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, a n'étant pas un multiple de p (autrement dit a n'est pas un multiple de p), montrer que : $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$.

Exercice 2.

Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes de la variable x, définie par les relations :
$$P_0(x) = 2, P_1(x) = x + \frac{1}{2}, \qquad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad 16P_n(x) - 8(2x+1)P_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) = 0$$
On notera P_n' le polynôme dérivée de P_n.

1.
   a. Expliciter P_2 et P_3.
   b. Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.
   c. Montrer que $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x-1)$.
   d. Etablir une relation analogue entre $P_n'(x)$ et $P_n'(-x-1)$.
   e. Montrer que si α est une racine de P_n, il en est de même de $-1-\alpha$.
   f. Montrer qu'il existe une racine commune à tous les P_{2n+1} et à tous les P_{2n}'.
2. Dans cette question on suppose que $-1 \leq x \leq 0$.
   a. Justifier l'existence d'un unique $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = -\cos^2(\theta)$.
   b. Dans la suite, on pose $f_n(\theta) = P_n(-\cos^2(\theta))$ et $g_n(\theta) = P_n'(-\cos^2(\theta))$.
   Exprimer $f_1(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$ et $f_2(\theta)$ en fonction de $\cos(4\theta)$.
   c. Montrer par récurrence que : $f_n(\theta) = \frac{2(-1)^n}{4^n}\cos(2n\theta)$.
   Indication : montrer que $2\cos(2\theta)\cos(2(n-1)\theta) - \cos(2(n-2)\theta) = \cos(2n\theta)$
   d. Déterminer l'ensemble des racines de P_n, pour $n \geq 1$. On commencera par celles appartenant à $[-1,0]$.
   e. On suppose $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Pour $n \geq 1$, exprimer $g_n(\theta)$ en fonction de $\frac{\sin(2n\theta)}{\sin(\theta)}$.
   En déduire l'ensemble des racines du polynôme P_n'. On commencera par celles appartenant à $]-1,0[$.
   f. Calculer $P_n(0)$, $P_n(-1)$, $P_n'(0)$, $P_n'(-1)$ et $P_{2n}'\left(-\frac{1}{2}\right)$ pour $n \geq 1$.
3. Dans cette question, on suppose, que $x < -1$ ou $x > 0$.
   a. Soit $\left(z_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite définie par récurrence par
$$\forall n \geq 2, \qquad z_{n-2}(x) - 8(2x+1)z_{n-1}(x) + 16z_n(x) = 0 \ \ (E)$$
   Déterminer $z_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n et x et de deux fonctions $a(x)$ et $b(x)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
   b. Déterminer a et b deux réels tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$P_n(x) = a\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{x(x+1)}\right)^n + b\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(x+1)}\right)^n$$
4. Montrer que la famille $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifie :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, 2x(x+1)P_n''(x) + (2x+1)P_n'(x) - 2n^2 P_n(x) = 0$$
   Indication : partir de $P_n(-\cos^2(\theta)) = \frac{2(-1)^n}{4^n}\cos(2n\theta)$ et dériver par rapport à θ.