Problème du 11 février 2015, durée 1h30.

L'usage de tout appareil électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit, ainsi que l'emploi de documents (notes de cours, etc). Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, elle (il) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Les problèmes ci-dessous sont indépendants.

Problème 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. On rappelle le développement limité à l'ordre 3 de la fonction $t \mapsto e^t$ en 0 :

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \underset{t\to 0}{o}(t^3).$$

   (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $t \mapsto \mathrm{sh}\, t$.

   (b) Donner un équivalent simple de $\mathrm{sh}\, t$ quand $t \to 0$.

   (c) Donner un équivalent simple de $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand $x \to 0^+$.

2. Etudier la parité de f.
3. (a) Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left(\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) .$$

5. Montrer que, pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $\mathrm{th}(t) < t$.
6. En déduire le tableau de variations de f.
7. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t}$.
8. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ on peut écrire

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) ,$$

   où $a_0, \ldots, a_2$ sont trois réels que l'on précisera.
9. Montrer que la fonction $g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue, que l'on note encore g ; puis prouver que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation

$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$

   admet une unique solution dans $]0, +\infty[$. On note cette solution u_n.

11. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
12. Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
13. En utilisant la question 8, déterminer un équivalent de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Problème 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $P(X) = (X+1)^{2n} - 1$.

1. Montrer que l'on peut écrire $P(X) = XQ(X)$, où Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant, et le terme constant noté q_0.
2. Montrer que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes $z_0, \dots z_{2n-1}$ donnés par la formule
$$\forall k \in \{0, \dots, 2n-1\} \quad z_k = 2ie^{\frac{ik\pi}{2n}} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) .$$

   Dans la suite de l'énoncé, on pose $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

3. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $A_n = \displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.
4. En déduire que, si $B_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ alors $A_n = \sqrt{B_n}$
5. Calculer de deux façons $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. En déduire B_n, puis enfin A_n.