Suites définies par une récurrence linéaire.

.

Récurrence d'ordre 1 à n composantes.

Soit $A \in M_d(K)$. On s'intéresse à des suites vectorielles (U_n), $n \geq 0$, à valeurs dans K^d vérifiant une récurrence linéaire:

$$U_{n+1} = AU_n(*)$$

Une solution de (*) est une suite vérifiant (*). En itérant, on a:

$$U_n = A^n U_0$$

d'où

Théorème d'existence et d'unicité. Pour tout vecteur $v \in K^d$ il existe une solution unique (U_n) vérifiant la condition initiale $U_0 = v$.

Pour calculer A^n on réduit A à une forme simple (diagonale, Dunford,...).

.

Propriétés générales.

1. L'ensemble des solutions (U_n) est un espace vectoriel de dimension d.

2. Si (U_n) est une solution, $c \in N$ et $V_n = U_{n+c}$, alors (V_n) est aussi une solution.

3. *Complexification.* Soit A une matrice *réelle* et (U_n) une solution *complèxe*; alors la partie réelle et la partie imaginaire de (U_n) sont des solutions réelles.

Il est donc utile de chercher dès le début des solutions complèxes.

4. Chaque vecteur propre v de A, $Av = \lambda v$, engendre une solution "exponentielle": $U_n = \lambda^n v$.

5. *Changement de base.* Par un changement linéaire des variables, $U = PV$, la récurrence $U_{n+1} = AU_n$ est transformé en $V_{n+1} = BV_n$ avec $B = P^{-1}AP$. On a $A = PBP^{-1}$ et $A^n = PB^nP^{-1}$.

.

Cas diagonalisable.

Si A est diagonalisable, une base de vecteurs propres $(v_1, ..., v_d)$ de A donne une base de solutions "exponentielles" $(\lambda_1^n v_1)$,..., $(\lambda_d^n v_d)$. pour une condition initiale v donnée, il suffit de décomposer v par rapport à la base $(v_1, ..., v_d)$: $v = \sum_i a_i v_i$ et la solution avec $U_0 = v$ sera $U_n = \sum_i a_i \lambda_i^n v_i$.

.

Une rédaction alternative. Soit P la matrice de passage vers une base de vecteurs propres, donc $A = PBP^{-1}$ avec B diagonale, $B = diag(\lambda_1, ..., \lambda_d)$. Alors $B^n = diag(\lambda_1^n, ..., \lambda_d^n)$ et $A^n = Pdiag(\lambda_1^n, ..., \lambda_d^n)P^{-1}$.

Utilisation des projecteurs spectraux. Soit A diagonalisable, $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ $(k \leq d)$ le spectre de A et Π_i le projecteur spectral associé à la valeur propre λ_i. Alors $A = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ et on vérifie immédiatement que

$$A^n = \sum_i \lambda_i^n \Pi_i$$

Calcul de Π_i. Si A est diagonalisable, son polynôme minimal est à racines simples: $m_A(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$. .

Soit $q_i(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_{i-1})(x - \lambda_{i+1})...(x - \lambda_k) = m_A(x)/(x - \lambda_i)$.

Alors le projecteur spectral Π_i est donné par

$$\Pi_i = \frac{1}{q_i(\lambda_i)} q_i(A)$$

Structure des solutions (U_n) *dans le cas diagonalisable.*

La formule $U_n = \sum_i a_i \lambda_i^n v_i$ montre que toute solution complèxe est une somme des suites géométriques λ_i^n munies de coefficients constants. Par exemple, si une valeur propre λ_i dans cette somme est de module strictement plus grand que les autres, l'asymptotique de U_n est déterminée par le terme $a_i \lambda_i^n v_i$.

.

Cas général.

L'espace $E = K^d$ de décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques, $E = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{C}_i$. On peut utiliser la décomposition de Dunford: $A = \mathcal{D} + \mathcal{N}$, ou $\mathcal{D}$ est diagonalisable, N nilpotente: $\mathcal{N}^l = 0$ et $\mathcal{D}$ commute avec $\mathcal{N}$.

Rappeleons que $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Pi_i$, où Π_i est le projecteur spectral sur $\mathcal{C}_i$, et $\mathcal{N} = A - \mathcal{D}$. Alors

$$(\mathcal{D} + \mathcal{N})^n = \sum_0^{l-1} C_n^j \mathcal{D}^{n-j} \mathcal{N}^j$$

La somme contient au plus l termes. Il faut donc calculer les puissances $\mathcal{N}^j$ pour $1 \leq j < l$ et la suite $\mathcal{D}^n$: $\mathcal{D}^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n \Pi_i$.

.

Structure des solutions.

Soit $\mathcal{N}_i = \mathcal{N} \Pi_i$ (on a aussi $\mathcal{N}_i = (A - \lambda_i Id)\Pi_i$; alors

$$A^n = (\mathcal{D} + \mathcal{N})^n = \sum_{i=1}^k \sum_0^{l_i - 1} C_n^j \lambda_i^{n-j} \mathcal{N}_i^j$$

On en déduit que toute composante d'une solution *complexe* est une combinaison linéaire des suites $(n^p\lambda_i^n)$, où λ est une valeur propre de A et $0 \leq p < l_i$; ici l_i est l'indice de nilpotence de $\mathcal{N}_i$ qui est égal à la multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal de A.

Pour calculer Π_i on écrit $m_A(x) = (x-\lambda_i)^{l_i}q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x-\lambda_i)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda_i) \neq 0$). Par la formule de Bézout, on peut trouver des polynômes $r(x)$ et $s(x)$ tels que $(x-\lambda_i)^{l_i}r(x) + q(x)s(x) = 1$.

[On peut s'arranger pour que deg $(s) < l_i$ et deg $(r) <$ deg(q)].

Alors

$$\Pi_i = q(A)s(A).$$

.

Exemple. Soit la dimension $d = 2$, et le polynôme caractéristique
$p_A(x) = -(x-\lambda)(x-\mu)$.

1. Soit $\lambda \neq \mu$ (dans ce cas A est diagonalisable). Alors
$\Pi_\lambda = \frac{1}{\lambda-\mu}(A-\mu I)$ et $\Pi_\mu = -\frac{1}{\lambda-\mu}(A-\lambda I)$.
Donc $A^n = \lambda^n\Pi_\lambda + \mu^n\Pi_\mu = \frac{\lambda^n}{\lambda-\mu}(A-\mu I) - \frac{\mu^n}{\lambda-\mu}(A-\lambda I) = \frac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda-\mu}A + \frac{\lambda\mu^n-\mu\lambda^n}{\lambda-\mu}I$.

2. Soit $\lambda = \mu$. Alors $A = \lambda I + \mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ est nilpotent: $\mathcal{N}^2 = 0$. Donc $A^n = (\lambda I + \mathcal{N})^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}\mathcal{N}$.

.

Récurrence scalaire d'ordre d.

$$u_{n+d} = a_{d-1}u_{n+d-1} + ... + a_1u_{n+1} + a_0u_n (*)$$

Transformation en une récurrence d'ordre 1. .

A l'équation (*) on peut associer une récurrence équivalente d'ordre 1 en inroduisant la suite vectorielle (V_n) dans K^d: $V_n = (u_n, ..., u_{n+d-1})^t$.

Le système équivalent à (*) s'écrit $V_{n+1} = AV_n$, où A est une matrice compagnon: $a_{i,i+1} = 1$, $a_{n,j} = a_{j-1}$ et les autres éléments de A sont nuls.

On sait que le polynôme caractéristique de A est
$p_A(x) = (-1)^d[x^d - (a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_1x + a_0)]$ et que le polynôme minimal $m_A(x) = \pm p_A(x)$.

On en déduit:

.

Proposition. Soit $p_A(x) = (-1)^d(x-\lambda_1)^{m_1}...(x-\lambda_k)^{m_k}$. Les suites $(n^{p_j}\lambda_j^n)$, où $j = 1, ..., k$ et $0 \leq p_j < m_j$ forment une base (complèxe) des solutions de (*).

En vu de ce résultat, on n'a pas besoin de passer par la matrice, mais on peut traiter la récurrence directement:

Lemme. λ est une racine de l'équation caractéristique

$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - ... - a_1 x - a_0 = 0$ de multiplicité m si et seulement si les suites (λ^n), $(n\lambda^n)$,...,$(n^{m-1}\lambda^n)$ vérifient la relation de récurrence (*).

.

Démarche à suivre: pour résoudre l'équation scalaire (*) avec la condition initiale $u_1 = c_1$, ... $u_d = c_d$ il faut

1) résoudre l'équation caractéristique $x^d - a_{d-1}x^{d-1} - ... - a_1 x - a_0 = 0$ qui se déduit directement de l'équation de la récurrence (sans passer par la matrice);

2) écrire la solution comme une combinaison linéaire des solutions de base explicitées dans la Proposition avec des coefficients indéterminés et calculer les coefficients afin de satisfaire les conditions initiales (cela revient à résoudre un système d'équations linéaires).