

## Réduction des endomorphismes 4. bis

**Rappel.** 1. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

2. Toute valeur propre de  $f$  est racine de tout polynôme annulateur de  $f$ .

*Cas diagonalisable.* Soit  $f$  diagonalisable, donc le radical  $r(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_k)$  annule  $f$ :  $r(f) = 0$ . [ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sont les valeurs propres.]

Soit  $q_i(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_{i-1})(x - \lambda_{i+1}) \dots (x - \lambda_k)$ .

Le projecteur  $\Pi_i$  sur le sous-espace propre  $E_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$  parallèlement aux autres sous-espaces propres est donné par

$$\Pi_i = \frac{1}{q_i(\lambda_i)} q_i(f)$$

### Sous-espaces caractéristiques.

**4.1. Définition.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de multiplicité  $m$ . Le sous-espace  $\mathcal{C}_\lambda = \text{Ker}((f - \lambda \text{Id})^m)$  s'appelle le **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre  $\lambda$ . **Noter que  $\mathcal{C}_\lambda$  est stable par  $f$  et contient l'espace propre associé à  $\lambda$ .**

Le lemme des noyaux donne le corollaire:

**4.2. Corollaire.** Les sous-espaces caractéristiques associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

**4.3. Lemme.** 1. La dimension de  $\mathcal{C}_\lambda$  est égale à la multiplicité  $m$  de  $\lambda$ .

2. Soit  $f_\lambda$  l'endomorphisme induit par  $f$  dans  $\mathcal{C}_\lambda$ . Alors

$$p_{f_\lambda}(x) = (-1)^m (x - \lambda)^m.$$

•• *Démonstration.* On peut écrire  $p_f(x) = (x - \lambda)^m q(x)$  où  $q(x)$  est premier avec  $(x - \lambda)$  (ce qui est équivalent à  $q(\lambda) \neq 0$ ).

Vu que  $(f_\lambda - \lambda \text{Id})^m = 0$ , on a  $p_{f_\lambda}(x) = (-1)^k (x - \lambda)^k$ , où  $k$  est la dimension de  $\mathcal{C}_\lambda$ . Par le lemme des noyaux,  $E = \mathcal{C}_\lambda \oplus E'$ , où  $E' = \text{Ker}(q(f))$  est stable par  $f$ . Donc  $p_f(x) = p_{f_\lambda}(x) p_{f'}(x)$  où  $f'$  est l'endomorphisme induit par  $f$  dans  $E'$ . Mais  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $f'$  (tous les vecteurs propres associés à  $\lambda$  appartiennent à  $\mathcal{C}_\lambda$ ), donc  $p_{f'}(\lambda) \neq 0$ . En comparant  $p_f(x) = (x - \lambda)^m q(x)$  et  $p_f(x) = p_{f_\lambda}(x) p_{f'}(x)$  on conclut que  $p_{f_\lambda}(x) = \pm (x - \lambda)^m$  et  $k = m$ . ••

*Remarque.* Le fait que  $(f_\lambda - \lambda Id)^m = 0$  peut s'exprimer ainsi:  
 $f_\lambda = \lambda Id + \mathbf{n}_\lambda$ , où  $\mathbf{n}_\lambda$  est un endomorphisme nilpotent ( $\mathbf{n}_\lambda = f_\lambda - \lambda Id$ ).

**Le cas du polynôme caractéristique scindé:** en combinant le théorème de Cayley-Hamilton avec le lemme des noyaux on obtient:

**4.4. Corollaire.** Si le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé,  $p_f(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ , l'espace  $E$  se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques de  $f$ :  $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$ , où  $\mathcal{C}_i = Ker(f - \lambda_i Id)^{m_i}$ ; la dimension de  $\mathcal{C}_i$  est égale à la multiplicité  $m_i$ . Soit  $f_i$  l'endomorphisme induit dans  $\mathcal{C}_i$ . On a  $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$ , où  $\mathbf{n}_i$  est nilpotent:  $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$ .

*Remarque.* L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $p_f$  est scindé et chaque sous-espace caractéristique est un espace propre.

**4.5. Projecteurs spectraux.** On suppose que le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé,  $p_f(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ .

Soit  $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$ . Soit  $\Pi_i$  la projection sur le sous-espace caractéristique  $\mathcal{C}_i$  parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques. On appelle  $\Pi_i$  **projecteur spectral**.

Le projecteur  $\Pi_i$  est défini de façon suivante: soit  $v \in E$  et  $v = v_1 + \dots + v_k$  avec  $v_j \in \mathcal{C}_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Alors  $\Pi_i(v) = v_i$ .

Autrement dit, si  $v \in \mathcal{C}_i$  alors  $\Pi_i(v) = v$  et si  $v \in \mathcal{C}_j$  avec  $j \neq i$ , alors  $\Pi_i(v) = 0$ .

Les projecteurs  $\Pi_i$  vérifient:

1.  $\Pi_1 + \dots + \Pi_k = Id$ .
2.  $\Pi_i^2 = \Pi_i$ .
3.  $\Pi_i \Pi_j = 0$  si  $i \neq j$ .

*Remarque:* Si  $f$  est diagonalisable, on peut écrire  $f = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ .

**Calcul des projecteurs spectraux.**

**Lemme.** Soit  $p(x) = p_1(x) \dots p_k(x)$ , et soit  $q_i(x) = p_1(x) \dots p_{i-1}(x) p_{i+1}(x) \dots p_k(x) = p(x)/p_i(x)$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (1) Les polynômes  $p_1, \dots, p_k$  sont deux à deux premiers entre eux;
- (2)  $p_i$  est premier avec  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ;

- (3) Les polynômes  $q_1, \dots, q_k$  sont premiers entre eux dans leur ensemble;  
 (4) (Bezout) il existe des polynômes  $u_1, \dots, u_k$  tels que

$$u_1(x)q_1(x) + \dots + u_k(x)q_k(x) = 1$$

*Remarque:* on peut toujours choisir les polynômes  $u_i$  de façon à ce que  $\deg(u_i) < \deg(p_i)$ .

**Proposition.** Soit  $p_f(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ , et  $q_i(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} (x - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ . Soit  $u_1, \dots, u_k$  tels que  $u_1(x)q_1(x) + \dots + u_k(x)q_k(x) = 1$ . Alors

$$\Pi_i = u_i(f)q_i(f)$$

•• *Démonstration.* Soit  $P_i = u_i(f)q_i(f)$ . Evidemment,  $P_1 + \dots + P_k = Id$ . Soit  $v \in \mathcal{C}_j$ . Si  $j \neq i$ , alors  $q_i(f)v = 0$ , donc  $P_i v = 0$ . Si  $j = i$ , on a  $P_l v = 0$  pour  $l \neq i$  et vu que  $P_1 v + \dots + P_k v = v$ , il reste  $P_i v = v$ . Conclusion:  $P_i = \Pi_i = u_i(f)q_i(f)$ . ••

*Cas spécial: valeur propre simple.* Soit  $m_i = 1$ . Alors on peut trouver  $u_1, \dots, u_k$  tels que  $\deg u_i = 0$ , donc  $u_i(x) = c$  constante. En posant  $x = \lambda_i$  dans la relation  $u_1(x)q_1(x) + \dots + u_k(x)q_k(x) = 1$  on obtient  $c = \frac{1}{q_i(\lambda_i)}$ . Donc

$$\Pi_i = \frac{1}{q_i(\lambda_i)} q_i(f)$$

*Décomposition en éléments simples.*

La formule  $u_1(x)q_1(x) + \dots + u_k(x)q_k(x) = 1$  est équivalente à  $\frac{1}{(x-\lambda_1)^{m_1} \dots (x-\lambda_k)^{m_k}} = \frac{u_1(x)}{(x-\lambda_1)^{m_1}} + \dots + \frac{u_k(x)}{(x-\lambda_k)^{m_k}}$  - décomposition de la fraction  $\frac{1}{(x-\lambda_1)^{m_1} \dots (x-\lambda_k)^{m_k}}$  en éléments simples.

*Exemple.*

En particulier, soit  $\dim E = 3$  et  $p_f(x) = -(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)^2$ . Alors  $q_1(x) = (x - \lambda_2)^2$  et  $q_2(x) = x - \lambda_1$ .

Donc

$$\Pi_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} (f - \lambda_2 Id)^2 \text{ et}$$

$$\Pi_2 = Id - \Pi_1 = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} ((2\lambda_2 - \lambda_1)Id - f)(f - \lambda_1 Id).$$

*Remarques.* 1) Si  $\Pi$  est un projecteur et  $\Pi f = f \Pi$ , alors  $\text{Ker}(\Pi)$  et  $\text{Im}(\Pi)$  sont des sous-espaces supplémentaires stables par  $f$ .

2) Si  $E_\lambda \neq \mathcal{C}_\lambda$ , le sous-espace propre  $E_\lambda$  n'admet pas de sous-espace supplémentaire stable par  $f$ .

### Décomposition de Dunford.

Supposons que le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé.

Soit  $f_i$  l'endomorphisme induit dans  $\mathcal{C}_i$ . On a  $(f_i - \lambda_i Id)^{m_i} = 0$ , donc  $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$ , où  $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$ , donc  $\mathbf{n}_i$  est nilpotent.

En utilisant cette décomposition, définissons deux endomorphismes,  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{n}$ : si  $v \in \mathcal{C}_i$ , on pose  $\mathbf{d}(v) = \lambda_i v$  et  $\mathbf{n}(v) = \mathbf{n}_i(v)$ . Donc  $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ .

En utilisant les projecteurs spectraux, on écrit  $\mathbf{d} = \sum_i \lambda_i \Pi_i$  et  $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$ . Vu que  $\Pi_i$  est un polynôme de  $f$ , on en déduit que  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{n}$  sont des polynômes de  $f$ .

En résumé,  $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$  où  $\mathbf{d}$  est diagonalisable,  $\mathbf{n}$  est nilpotent et  $\mathbf{d}$  commute avec  $\mathbf{n}$ .

**4.7. Théorème. (Décomposition de Dunford.)** Si le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé,  $f$  se décompose en somme  $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$  où  $\mathbf{d}$  est diagonalisable,  $\mathbf{n}$  est nilpotent et  $\mathbf{d}$  commute avec  $\mathbf{n}$ . Une telle décomposition est unique.

*Remarque.* Vu que  $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ , les trois propriétés: (i)  $\mathbf{d}$  commute avec  $\mathbf{n}$ , (ii)  $\mathbf{d}$  commute avec  $f$  et (iii)  $\mathbf{n}$  commute avec  $f$  sont équivalentes.

•• *Démonstration de l'unicité.* Soit  $f = \mathbf{d}' + \mathbf{n}'$  une deuxième décomposition. On a  $\mathbf{d} - \mathbf{d}' = \mathbf{n}' - \mathbf{n}$ .

Montrons que  $\mathbf{d}$  commute avec  $\mathbf{d}'$ .

Pour cela noter que  $\mathbf{d}'$  commute avec  $f$  donc  $\mathbf{d}'$  commute avec tout polynôme de  $f$ , donc  $\mathbf{d}'$  commute avec  $\mathbf{d}$ .

Par conséquent,  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{d}'$  sont simultanément diagonalisable et donc  $\mathbf{d} - \mathbf{d}'$  est diagonalisable.

Du fait que  $\mathbf{d}$  commute avec  $\mathbf{d}'$  on déduit que  $\mathbf{n}$  commute avec  $\mathbf{n}'$  (parce que  $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$  et  $\mathbf{n}' = f - \mathbf{d}'$ ). Alors on vérifie immédiatement que  $\mathbf{n}' - \mathbf{n}$  est nilpotent.

L'égalité entre  $\mathbf{d} - \mathbf{d}'$  diagonalisable et  $\mathbf{n}' - \mathbf{n}$  nilpotent implique

$$\mathbf{d} - \mathbf{d}' = \mathbf{n}' - \mathbf{n} = 0. \bullet\bullet$$

*Remarque.* 1) On a  $p_f(x) = p_{\mathbf{d}}(x)$ .

2)  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\mathbf{n} = 0$ .

## Polynôme minimal.

**Définition.** Un **polynôme minimal** de  $f$  est un polynôme annulateur non-nul de degré minimum.

**4.8. Proposition.** *Un polynôme minimal divise tout polynôme annulateur.*

•• *Démonstration.* Soit  $b$  un polynôme minimal et  $a$  un polynôme annulateur. La division avec reste donne  $a = qb + r$ , donc  $r = a - qb$ , donc  $r$  est un polynôme annulateur de degré inférieur à celui de  $b$ , donc  $r = 0$ . ••

Par conséquent, il y a un seul polynôme minimal **unitaire** (de coefficient dominant 1), appelé **le** polynôme minimal; il sera noté  $m_f$ .

En particulier, **le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.**

*Exemple:* soit  $f$  diagonalisable,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres de  $f$  deux à deux distinctes. Alors le polynôme  $r(x) = (x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_k)$  annule  $f$  et en fait  $r(x)$  est le polynôme minimal de  $f$ .

**4.9. Critère de diagonalisabilité.** *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.*

•• *Démonstration.* Si  $f$  est diagonalisable,  $f$  est annulé par un polynôme  $q$  scindé à racines simples; le polynôme minimal divise  $q$  et donc est aussi scindé à racines simples. Réciproquement, si le polynôme minimal est scindé à racines simples, la Proposition 3.4 s'applique. ••

**4.10. Proposition.** 1. Les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres.

2. Le polynôme minimal est scindé si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé.

•• *Démonstration.* 1. Chaque valeur propre est racine de tout polynôme annulateur. De l'autre côté, soit  $\alpha$  une racine de  $m_f$ ; vu que  $m_f$  divise le polynôme caractéristique,  $\alpha$  est une racine de  $p_f$ , donc une valeur propre.

2. Dans les deux cas, être scindé dans  $R$  est équivalent aux fait que toutes les valeurs propres sont réelles. ••

*Exemple:* soit  $f$  un endomorphisme nilpotent; son polynôme caractéristique est  $p_f(x) = (-1)^n x^n$  ( $n = \dim(E)$ ) et le polynôme minimal est  $m_f(x) = x^k$ , où  $k$  est l'indice de nilpotence de  $f$ .

**4.11. Lemme.** Soit  $E$  la somme des sous-espaces stables,  
 $E = E_1 + \dots + E_k$ ; soit  $f_i$  l'endomorphisme induit dans  $E_i$ . Alors pour  
le polynôme minimal on a  
 $m_f = \text{ppcm}(m_{f_1}, \dots, m_{f_k})$ .  
●● *Démonstration.* Un polynôme  $q(x)$  annule  $f$  si et seulement si  
 $q(f_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , donc si et seulement si  $q$  est divisible par tous les  
 $m_{f_i}$ . ●●