Réduction des endomorphismes 3.

.

Polynômes annulateurs

Les polynômes annulateurs donnent un moyen de vérifier si un endomorphisme est diagonalisable et, de l'autre côté, de décomposer l'endomorphisme en blocs invariants.

Polynômes d'un endomorphisme. Soit f un endomorphisme de E et $q \in K[x]$: $q(x) = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k$.

On note $q(f) = a_0Id + a_1f + ... + a_kf^k$ - un polynôme de f.

Tous les polynômes de f commutent entre eux.

.

Remarques: **1.** Si λ est une valeur propre de f, alors $q(\lambda)$ est une valeur propre de $q(f)$: si $f(v) = \lambda v$, alors $q(f)(v) = q(\lambda)v$.

2. $\ker q(f)$ est un sous-espace invariant par f.

.

3.1. Définition. Un polynôme q est dit **annulateur** de f si $q(f) = 0$. (on dit aussi que q annule f ou que f annule q).

Donc si $q(f) = 0$ et λ est une valeur propre de f, alors $q(\lambda) = 0$: **chaque valeur propre de f est une racine de tout polynôme annulateur.**

.

La relation $q(f) = a_0Id + a_1f + ... + a_kf^k = 0$ signifie que la famille $(Id, f, f^2, ..., f^k)$ est liée dans l'espace des endomorphismes de E.

En dimension finie, il y a toujours des polynômes annulateurs non-nuls. En effet, soit dim $(E) = n$; la suite $Id, f, f^2, ..., f^{n^2}$ de n^2+1 endomorphismes est liée parce que la dimension de l'espace des endomorphismes est n^2. Donc il y a forcement des polynômes annulateurs de degré $\leq n^2$. On verra qu'en fait il y a des polynômes annulateurs de degré $\leq n$ (conséquence du théorème de Cayley - Hamilton).

.

Remarque: si $a_0Id + a_1f + ... + a_kf^k = 0$ et $a_0 \neq 0$, alors f est inversible: $f(a_1Id + ... + a_kf^{k-1}) = -a_0Id$, et $f^{-1} = -(a_1Id + ... + a_kf^{k-1})/a_0$.

.

3.2. Cas diagonalisable: soit f diagonalisable, soit $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres de f deux à deux distinctes. Alors le polynôme $r(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$ annule f; en fait $r(x)$ est le radical du polynôme caractéristique de f. A fortiori, le polynôme caractéristique $p_f(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{m_1}...(x - \lambda_k)^{m_k}$ annule f: $p_f(f) = 0$.

Remarque: on peut déterminer le radical $r(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$ à partir de p_f sans calculer les valeurs propres: $r = \pm\frac{p_f}{pgcd(p_f, p'_f)}$.

.

Le lemme suivant ("lemme des noyaux") nous permettra de décomposer E en somme directe des sous-espaces stables.

3.3. Lemme des noyaux. Soit $p_1, ..., p_k$ des polynômes deux à deux premiers entre eux et $p(x) = p_1(x)...p_k(x)$. Alors

$$Ker(p(f)) = Ker(p_1(f)) \bigoplus ... \bigoplus Ker(p_k(f)).$$

•• *Démonstration.* Soit $k = 2$. Par le Théorème de Bézout on peut trouver deux polynômes u_1, u_2 tel que $u_1(x)p_1(x) + u_2(x)p_2(x) = 1$, donc $u_1(f)p_1(f) + u_2(f)p_2(f) = Id$.

Soit $v \in E$, soit $v_1 = u_2(f)p_2(f)v$ et $v_2 = u_1(f)p_1(f)v$, donc $v = v_1 + v_2$. Si $v \in Ker(p_1p_2(f))$, on a $v_1 \in Ker(p_1(f))$ et $v_2 \in Ker(p_2(f))$. Cela montre que $Ker(p(f)) = Ker(p_1(f)) + Ker(p_2(f))$.

Si en plus $v \in Ker(p_1(f)) \cap Ker(p_2(f))$, alors $v_1 = 0$ et $v_2 = 0$, donc la somme est directe.

Ensuite on procède par récurrence sur k: si $k > 2$, on écrit

$\tilde{p}(x) = p_2(x)...p_k(x)$. On a $p(x) = p_1(x)\tilde{p}(x)$, donc

$Ker(p(f)) = Ker(p_1(f)) \bigoplus Ker(\tilde{p}(f))$. Il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence au polynôme $\tilde{p}(x)$. ••

.

Remarque: certains sous-espaces $Ker(p_i(f))$ peuvent être "nuls".

.

En particulier, si p annule f, on a une décomposition de l'espace E en somme directe de sous-espaces stables: $E = Ker(p_1(f)) \bigoplus ... \bigoplus Ker(p_k(f))$.

.

Projecteurs associés. Soit $k = 2$, $p(f) = 0$ et $p(x) = p_1(x)p_2(x)$.

Soit $u_1(x)p_1(x) + u_2(x)p_2(x) = 1$. Le projecteur Π_1 sur le sous-espace $Ker(p_1(f))$ parallèlement à $Ker(p_2(f))$ est donné par $\Pi_1 = u_2(f)p_2(f)$ (cela est vérifié pendant la démonstration du lemme des noyaux).

En particulier, si $p_1(x) = x - \lambda$, on peut prendre pour $u_2(x)$ la constante: $u_2(x) = \frac{1}{p_2(\lambda)}$ et donc $\Pi_1 = \frac{1}{p_2(\lambda)} p_2(f)$.

En général, si $p(f) = 0$, le projecteur Π_i sur le sous-espace $Ker(p_i(f))$ parallèlement aux autres sous-espaces est donné par la procédure suivante: on écrit $\tilde{p}(x) = p_1(x)...p_{i-1}(x)p_{i+1}(x)...p_k(x)$. On a $p(x) = p_i(x)\tilde{p}(x)$ ce qui nous ramène au cas $k = 2$.

.

3.4. Proposition. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

•• *Démonstration.* a) Soit f diagonalisable et $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres de f deux à deux distinctes. Alors le polynôme

$r(x) = (x-\lambda_1)...(x-\lambda_k)$ annule f.

b) Soit $p(x) = (x-\alpha_1)...(x-\alpha_k)$ un polynôme scindé à racines simples et $p(f) = 0$. Soit $p_i(x) = x-\alpha_i$; on est dans le cadre du lemme des noyaux, donc $E = Ker(p_1(f)) \bigoplus ... \bigoplus Ker(p_k(f))$. Mais $Ker(p_i(f)) = Ker(f-\alpha_i Id)$ est un espace propre associé à α_i (réduit à 0 si α_i n'est pas une valeur propre). Donc E est la somme des sous-espaces propre et f est diagonalisable. ••

.

Remarque. Soit $p(x) = (x-\alpha_1)...(x-\alpha_k)$ un polynôme scindé à racines simples et $p(f) = 0$. (Rappelons que toutes les valeurs propres de f se trouvent parmi $\alpha_1, ...\alpha_k$.)

Soit $q_i(x) = (x-\alpha_1)...(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})...(x-\alpha_k)$.

Le projecteur Π_i sur le sous-espace propre $Ker(f-\alpha_i Id)$ parallèlement aux autres sous-espaces propres est donné par $\Pi_i = \frac{1}{q_i(\alpha_i)} q_i(f)$.

.

3.5. Corollaire. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si le radical du polynôme caractéristique $r = \frac{p_f}{pgcd(p_f, p'_f)}$ est scindé et annule f.

.

3.6. Lemme. L'endomorphisme induit dans un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.

•• *Démonstration.* Si f est diagonalisable, alors f est annulé par un polynôme q scindé à racines simples; l'endomorphisme induit sera aussi annulé par q et on applique la Proposition 3.5. ••

.

3.7. Proposition. Deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont diagonalisables simultanément: il existe une base commune de vecteurs propres.

•• *Démonstration.* Soit $fg = gf$. Chaque espace propre E_λ de f est stable par g, donc l'endomorphisme induit par g dans E_λ admet une base de vecteurs propres; la réunion de telles bases est une base de vecters propres copmmuns de f et g dans E. ••

.

3.8. Théorème (Cayley - Hamilton). Tout endomorphisme f est annulé par son polynôme caractéristique: $p_f(f) = 0$.

. •• *Démonstration.* Rappel: soit C une matrice $n \times n$ et $\widetilde{C}$ sa comatrice. Alors $\widetilde{C}^t C = det(C) I_n$. Prenons $C = A - xI_n$: $\widetilde{(A-xI_n)}^t (A - xI_n) = p_A(x) I_n$.

Posons $\widetilde{(A-xI_n)}^t = B_0 + B_1 x + ... + B_{n-1} x^{n-1}$ et

$p_A(x) = c_0 + c_1x + ... + c_{n-1}x^{n-1} + (-1)^n x^n$. Alors en égalisant les coefficients dans l'égalité $\widetilde{(A - xI_n)}^t (A - xI_n) = p_A(x)I_n$ on obtient

$B_0A = c_0I_n$,

$B_1A - B_0 = c_1I_n$,

....

$B_{n-1}A - B_{n-2} = c_{n-1}I_n$,

$-B_{n-1} = (-1)^nI_n$.

Alors $p_A(A) = c_0I_n + c_1A + ... + c_{n-1}A^{n-1} + (-1)^nA^n =$

$B_0A + (B_1A - B_0)A + ... + (B_{n-1}A - B_{n-2})A^{n-1} - B_{n-1}A^n = 0$

(simplification totale). ●●