Trigonalisation

Il est parfois utile (par exemple si un endomorphisme n'est pas diagonalisable) à chercher une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

.

2.1 Lemme. Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

• • *Démonstration.* La permutation des éléments de la base canonique $p(e_i) = e_{n-i+1}$ convertit les matrices triangulaires supérieures en matrices triangulaires inférieures. • •

On a vu que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$ et son polynôme caractéristique est

$p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

.

Définition. Un endomorphisme est **trigonalisable** si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire (supérieure ou inférieure).

2.2 Théorème. Un endomorphisme est trigonalisable dans K si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans K.

Plus précisement:

- $K = \mathbf{C}$: tout endomorphisme est trigonalisable dans $\mathbf{C}$.
- $K = \mathbf{R}$: un endomorphisme est trigonalisable dans $\mathbf{R}$ si et seulement si toutes les racines complexes de son polynôme caractéristique sont réelles.

.

• • *Démonstration.* On procède par récurrence sur la dimension de E. Supposons le théorème vrai pour la dimension inférieure à n.

Soit dim $E = n$. Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre, $f(v) = \lambda v$. Prenons $v_1 = v$ et complétons v_1 en une base $(v_1, ..., v_n)$ de E. La matrice A de f dans cette base est triangulaire supérieure par blocs: le premier bloc diagonal est λ et le deuxième bloc (de dimension $n-1$) sera noté B. On a $p_f(x) = (\lambda - x)p_B(x)$, donc $p_B(x)$ est aussi scindé dans K. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la matrice B; il exsite une matrice de passage P telle que $P^{-1}BP$ soit triangulaire supérieure. Soit $\tilde{P}$ la matrice diagonale par bloc avec le premier bloc de taille 1 egal à 1 et le deuxième bloc de taille $n-1$ égal à P. Alors $\tilde{P}^{-1}A\tilde{P}$ est triangulaire supérieure.

• •

La trigonalisation dans $\mathbf{C}$ permet, par exemple, calculer rapidement le polynôme caractéristique des puissances de A.

.

Remarque: Si λ est une valeur propre de A, alors λ^k est une valeur propre de A^k: si $A(v) = \lambda v$, alors $A^k(v) = \lambda^k v$.

Plus généralement, si $q \in K[x]$: $q(x) = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k$, on note $q(f) = a_0Id + a_1A + ... + a_kA^k$ - un polynôme de A. Si λ est une valeur propre de A, alors $q(\lambda)$ est une valeur propre de $q(A)$: si $A(v) = \lambda v$, alors $q(A)(v) = q(\lambda)v$.

.

2.3. Proposition. Soit $p_A(x) = (-1)^n\Pi_{i=1}^n(x - \lambda_i)$ la factorisation de p_A dans **C**. Alors $p_{A^k}(x) = (-1)^n\Pi_{i=1}^n(x - \lambda_i^k)$.

De manière plus générale, soit $q(t) = a_0 + a_1t + ... + a_kt^k$, et

$q(A) = a_0 + a_1A + ... + a_kA^k$. Alors $p_{q(A)}(x) = (-1)^n\Pi_{i=1}^n(x - q(\lambda_i))$.

• • *Démonstration.* Si A est semblable à une matrice triangulaire T avec les éléments diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$, alors $q(A)$ est semblable à la matrice triangulaire $q(T)$ avec les éléments diagonaux $q(\lambda_1), ..., q(\lambda_n)$. • •

.

2.4. Corollaire. Les valeurs propres réelles de la matrice $q(A)$ sont les nombres réels dans la liste $q(\lambda_1), ..., q(\lambda_n)$.

.

Rappel: la **trace** d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux: $tr(A) = \sum_i a_{ii}$.

Lemme. Pour toute deux matrice A et B on a $tr(AB) = tr(BA)$.

Corollaire. Les matrices semblables ont la même trace.

.

2.5. Corollaire. Soit $K = C$. La trace d'une matrice est égal à la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités: $tr(A) = \lambda_1 + ... + \lambda_n$.

On a aussi $tr(A^k) = \lambda_1^k + ... + \lambda_n^k$ et de manière plus générale, pour un polynôme $q(t) = a_0 + a_1t + ... + a_kt^k$, on a $tr(q(A)) = q(\lambda_1) + ... + q(\lambda_n)$

.

Remarque 1. Les coefficients du polynôme caractéristique

$p_A(x) = (-1)^nx^n + c_1x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n = (-1)^n\Pi_{i=1}^n(x - \lambda_i)$ sont liés avec ses racines par les formules de Viète (ou Vieta):

$c_k = (-1)^{n-k}\sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_k}$.

.

Remarque 2. Les traces des puissances $s_k = tr(A^k)$ sont liées avec les coefficients du polynôme caractéristique $p_A(x) = (-1)^nx^n + c_1x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n$ par les *formules de Newton:*

$$(-1)^ns_k + c_1s_{k-1} + ... + c_{k-1}s_1 + kc_k = 0$$

$k = 1, 2, ..., n$. Cela permet d'exprimer les c_k en termes des s_k (ou réciproquement) par récurrence.

Endomorphismes nilpotents.

Définition. Un endomorphisme est **nilpotent** s'il existe k tel que $f^k = 0$. La valeur minimal de k s'appelle l'**indice de nilpotence** de f.

2.6. Proposition. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il a le même polynôme caractéristique que l'endomorphisme nul: $p_f(x) = (-1)^n x^n$.

• • *Démonstration.* 1. Soit f nilpotent. Si λ est une valeur propre de f, alors λ^k est une valeur propre de $f^k = 0$, donc $\lambda = 0$. Donc le polynôme $p_f(x)$ n'a pas de racine non-nulle. Si $K = C$, cela entraine que $p_f(x) = (-1)^n x^n$. Si $K = R$, on se ramène au cas $K = C$ en considérant la matrice de f dans une base comme une matrice à coefficients complèxes.

2. Soit $p_f(x) = (-1)^n x^n$ - un polynôme scindé avec une seule racine 0 (de multiplicité n). f est donc trigonalisable par une matrice triangulaire T avec la diagonale principale nulle. Pour une telle matrice on a $T^n = 0$ (évident). • •

2.7. Corollaire. Un endomorphisme nilpotent non-nul n'est pas diagonalisable.

En effet, les valeurs propres de f étant nulles, si f est diagonalisable, la matrice diagonale semblable à f serait nulle.

.

On a déjà remarqué que $p_{f+\mu Id}(x) = p_f(x-\mu)$. En notant $g = f + \mu Id$ on déduit de la proposition précédente:

2.8. Proposition. Soit g un endomorphisme. On a
$p_g(x) = (-1)^n (x-\mu)^n$ si et seulement si $g - \mu Id$ est nilpotent.

.

Sommes directes.

Définition. Soit E un espace vectoriel sur K, ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soit $E_1, ..., E_k$ ses sous-espaces vectoriels. La **somme** $E_1 + ... + E_k$ est le sous-espace formé de tous les vecteurs $v = v_1 + ... + v_k$ où $v_i \in E_i$.

La somme est **directe** (noté $E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$) si une telle décomposition est **unique:** si $v = v_1 + ... + v_k = u_1 + ... + u_k$ avec $v_i \in E_i$ et $u_i \in E_i$ alors $v_i = u_i$, $(i = 1, ..., k)$.

.

2.9. Lemme. Les propriétés 1.-5. suivantes sont équivalentes:

1. La somme $E_1 + ... + E_k$ est directe.

2. La relation $v_1 + ... + v_k = 0$ où $v_i \in E_i$ entraine $v_1 = 0$, ... , $v_k = 0$.

3. Soit B_1, ... , B_k des bases des sous-espaces $E_1, ..., E_k$. Alors leur réunion $B = B_1 \cup ... \cup B_k$ est libre et donc est une base de la somme $E_1 + ... + E_k$ (base adaptée).

4. Soit dim $(E) < \infty$, alors dim $(E_1 + ... + E_k) = \dim E_1 + ... + \dim E_k$.

5. Pour tout i, $i \leq 1 < k$ on a $E_{i+1} \cap (E_1 + ... + E_i) = \{0\}$.

.

A noter: la somme de deux sous-espaces E_1 et E_2 est directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Exemple: soit $e_1, ..., e_k$ des vecteurs non-nuls de E. La somme $Ke_1 + ... + Ke_k$ est directe si et seulement si les vecteurs $e_1, ..., e_k$ sont linéairement indépendants. On a $E = Ke_1 \bigoplus ... \bigoplus Ke_k$ si et seulement si $(e_1, ..., e_k)$ est une base de E.

.

2.10. Projecteurs.

Soit $E = F \oplus G$: chaque vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique $v = v_1 + v_2$, où $v_1 \in F$ et $v_2 \in G$.

Le **projecteur** P_F sur F parallèlement à G est défini par $P_F(v) = v_1$. Autrement dit, $P_F(v) = v$ si $v \in F$ et $P_F(v) = 0$ si $v \in G$, donc $Im(P_F) = F$ et $Ker(P_F) = G$.

Le projecteur P_F porte la même information que la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

Par symétrie, le projecteur P_G sur G parallelement à F est défini par $P_G(v) = v_2$, ou encore $P_G = Id - P_F$.

Evidemment, $P_F^2 = P_F$, $P_G^2 = P_G$, $P_F + P_G = Id$ et $P_F P_G = 0 = P_G P_F$.

Les vecteurs non-nuls dans le sous-espace F sont les vecteurs propres de P_F de valeur propre 1; les vecteurs non-nuls dans le sous-espace G sont les vecteurs propres de valeur propre 0.

En choisissant des bases de F et G on diagonalise P_F.

Le polynôme caractéristique de P_F est $(-1)^n x^{n-k}(x-1)^k$, où

k =dim (F).

Lemme. L'endomorphisme f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$.

• • *Démonstration.* Soit $f^2 = f$, $F = Im(f)$ et $G = Ker(f)$. Pour $v \in E$ soit $v_1 = f(v)$ et $v_2 = v - f(v)$. On a $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in F$ et $f(v_2) = f(v) - f(f(v)) = 0$, donc $v_2 \in G$.

Si $v \in F \cap G$, alors $v = f(u)$ et $0 = f(v) = f(f(u)) = f(u) = v$, donc $F \cap G = 0$ et $E = F \oplus G$. Donc f est le projecteur sur F parallèlement à G. • •

.

Rappelons que si f est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $g = Id - f$ est le projecteur sur G parallèlement à F.

.

Projecteurs associés à la décomposition en somme directe:

$E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$.

Soit Π_i la projection sir E_i parallèlement à $E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_{i-1} \bigoplus E_{i+1} ... \bigoplus E_k$.

Les projecteurs Π_i vérifient:
1. $\Pi_1 + ... + \Pi_k = Id$.
2. $\Pi_i^2 = \Pi_i$.
3. $\Pi_i \Pi_j = 0$ si $i \neq j$.

La famille des projecteurs $(\Pi_1, ..., \Pi_k)$ porte exactemrnt la même information que la décomposition $E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$.

.

Sous-espaces stables.

Définition. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Un sous-espace F de E est **stable** ou **invariant** par f si $f(F) \subset F$, (donc, si pour tout $v \in F$ on a $f(v) \in F$).

A noter: Ker(f) et Im(f) sont des sous-espaces stables par f.

2.11. Lemme. Si g commmute avec f, $fg = gf$, alors Ker(g) et Im(g) sont des sous-espaces stables par f.

• • *Démonstration.* Si $v \in Ker(g)$ on a $g(f(v)) = f(g(v)) = 0$ donc $f(v) \in Ker(g)$.

Si $v \in Im(g)$, alors $v = g(u)$ et $f(v) = f(g(u)) = g(f(u))$, donc

$f(v) \in Im(g)$. • •

Une grande famille d'endomorphismes qui commute avec f est donnée par les polynômes $g = a_0 Id + a_1 f + ... + a_k f^k$.