Polynôme minimal.

.

Soit f un endomorphisme de E.

Définition. Un **polynôme minimal** de f est un polynôme annulateur non-nul de degré minimum.

1. Proposition. *Un polynôme minimal divise tout polynôme annulateur.*

•• *Démonstration.* Soit b un polynôme minimal et a un polynôme annulateur. La division avec reste donne $a = qb + r$, donc $r = a - qb$, donc r est un polynôme annulateur de degré inférieur à celui de b, donc $r = 0$. ••

.

Par conséquent, il y a un seul polynôme minimal **unitaire** (de coefficient dominant 1), appelé **le** polynôme minimal; il sera noté m_f.

.

En particuler,

le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

.

Rappelons que, comme pour tout polynôme annulateur, chaque valeur propre de f est racine du polynôme minimal.

.

Exemple: soit f diagonalisable, $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres de f deux à deux distinctes. Alors le polynôme $r(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$ annule f et en fait $r(x)$ est le polynôme minimal de f.

.

2. Critère de diagonalisabilité. *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.*

•• *Démonstration.* Si f est diagonalisable, f est annulé par un polynôme q scindé à racines simples; le polynôme minimal divise q et donc est aussi scindé à racines simples. Réciproquement, si le polynôme minimal est scindé à racines simples, la Proposition 3.4 s'applique. ••

.

3. Proposition. 1. Les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres.

2. Le polynôme minimal est scindé si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé.

•• *Démonstration.* 1. Chaque valeur propre est racine de tout polynôme annulateur. De l'autre côté, soit α une racine de m_f; vu que m_f divise le polynôme caractéristique, α est une racine de p_f, donc une valeur propre.

2. Dans les deux cas, être scindé dans R est équivalent aux fait que toutes les valeurs propres sont réelles. ••

Calcul du polynôme minimal I.

Le fait que $m_f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{l-1}x^{l-1} + x^l$ est le polynôme minimal de f signifie que $a_0 Id + a_1 f + ... + a_{l-1}f^{l-1} + f^l = 0$ est la relation linéaire entre les puissances successives $Id, f, f^2, ...$ de plus petit degré. Donc on cherche l tel que la famille $Id, f, f^2, ..., f^{l-1}$ est libre dans l'espace des endomorphismes, mais $Id, ff^2, ..., f^{l-1}, f^l$ est liée, donc $f^l = -(a_0 Id + a_1 f + ... + a_{l-1}f^{l-1})$.

.

Exemple: endomorphisme nilpotent. Soit f un endomorphisme nilpotent; son polynôme caractéristique est $p_f(x) = (-1)^n x^n$ ($n =$dim(E)) et le polynôme minimal est $m_f(x) = x^k$, où k est l'indice de nilpotence de f.

.

Calcul du polynôme minimal II. Si on connait la factorisation du polynôme caractéristique $p_f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1}...(x-\lambda_k)^{m_k}$, on sait que le polynôme minimal est de la forme $m_f(x) = (x-\lambda_1)^{l_1}...(x-\lambda_k)^{l_k}$ avec les exposants l_i tels que $1 \le l_i \le m_i$.

[Cela veut dire que m_f divise p_f et à son tour est divisé par le radical $r(x) = (x-\lambda_1)...(x-\lambda_k)$.]

On peut donc esayer tous les candidats $q(x) = (x-\lambda_1)^{l_1}...(x-\lambda_k)^{l_k}$ et parmi ceux qui annule f chosir celui de degré minimun.

.

Utilité du polynôme minimal.

Si un polynôme $q(x) = (x-\lambda_1)^{l_1}...(x-\lambda_k)^{l_k}$ annule f, les sous-espaces caractéristiques sont donnés par $\mathcal{C}_i = Ker((f - \lambda_i Id)^{l_i})$. Pour calculer ces sous-espaces (les projecteurs associés) il est profitable de minimiser les exposants $l_1, ..., l_k$.

.

Exemple. Soit dim $E = 3$ et $p_f(x) = -(x-\lambda)(x-\mu)^2$. Alors on a deux possibilités.

a) Soit $m_f(x) = (x-\lambda)(x-\mu)^2$.

Dans la formule de Bezout $u(x)(x-\lambda) + v(x)(x-\mu)^2 = 1$ on calcule $v(x) = \alpha$ et $u(x) = -\alpha(x - 2\mu + \lambda)$, où $\alpha = (\lambda-\mu)^{-2}$.

Donc

$\Pi_\lambda = v(f)(f-\mu Id)^2 = \alpha(f-\mu Id)^2$ et

$\Pi_\mu = u(f)(f-\lambda Id) = -\alpha(f - 2\mu Id + \lambda Id)(f-\lambda Id)$.

.

b) Soit $m_f(x) = (x-\lambda)(x-\mu)$.

Dans la formule de Bezout $u(x)(x-\lambda) + v(x)(x-\mu) = 1$ on calcule $v(x) = \alpha$ et $u(x) = -\alpha$, où $\alpha = (\lambda-\mu)^{-1}$.

Donc $\Pi_\lambda = v(f)(f - \mu Id) = \alpha(f - \mu Id)$ et
$\Pi_\mu = u(f)(f - \lambda Id) = -\alpha(f - \lambda Id)$.

.

4. Lemme. Soit E la somme des sous-espaces stables par f, $E = E_1 + ... + E_k$; soit f_i l'endomorphisme induit dans E_i. Alors pour le polynôme minimal on a $m_f = ppcm(m_{f_1}, ..., m_{f_k})$.

•• *Démonstration.* a) Etant donné que le polynôme $m_f(x)$ annule f, il annule chaque f_i et donc $m_f(x)$ est multiple de chaque m_{f_i}, donc est multiple du $ppcm(m_{f_1}, ..., m_{f_k})$.

b) Soit $q(x) = ppcm(m_{f_1}, ..., m_{f_k})$; évidemment, $q(x)$ annule chaque f_i.

Pour $v \in E$ on écrit $v = v_1 + ... + v_k$, où $v_i \in E_i$. Alors $q(f)v = q(f)v_1 + ... + q(f)v_k = q(f_1)v_1 + ... + q(f_k)v_k = 0$, donc $q(x)$ annule f, donc $ppcm(m_{f_1}, ..., m_{f_k})$ est multiple de $m_f(x)$. ••

.

5. Corollaire. Si $m_f(x) = (x - \lambda_1)^{l_1}...(x - \lambda_k)^{l_k}$, alors l_i est l'indice de nilpotence de $f_i - \lambda_i Id$ dans le sous-espace caractéristique $\mathcal{C}_i$. En particulier, $\mathcal{C}_i = Ker(f - \lambda_i Id)^{l_i}$.

.

Polynôme minimal d'un vecteur.

Soit f un endomorphisme de E et $v \in E$.

On dit qu'un polynôme $q(x)$ annule v si $q(f)v = 0$.

Définition. Un **polynôme minimal** de v est un polynôme annulateur de v non-nul de degré minimum.

.

6. Proposition. Un polynôme minimal de v divise tout polynôme annulateur de v.

La démonstration est la même que pour le polynôme minimal de f.

.

Par conséquent, il y a un seul polynôme minimal **unitaire** (de coefficient dominant 1), appelé **le** polynôme minimal de v; il sera noté $m_v(x)$.

.

Sous-espace stable engendré par v.

Soit $E_v = Vect(v, f(v), f^2(v), ..., f^k(v), ...)$.

Evidemment, E_v est stable par f.

6. Lemme. (i) E_f est le plus petit sous-espace stable par f qui contient v.

(ii) Soit k tel que la famille $v, f(v), ..., f^{k-1}(v)$ est libre, mais la famille $v, f(v), ..., f^{k-1}(v), f^k(v)$ est liée. Alors $(v, f(v), ..., f^{k-1}(v))$ est une base de E_v, $f^k(v) = -(a_0 v + a_1 f(v) + ... + a_{k-1} f^{k-1}(v)$ et le polynôme minimal de v est $m_v(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$.

(iii) Soit g l'endomorphisme induit par f dans E_v.
Alors $m_g(x) = m_v(x)$.

.

Endomorphisme cyclique, matrice compagnon.

L'endomorphisme f est dit *cyclique* si il existe un vecteur v tel que $E_v = E$ (on appelle v vecteur cyclique).

Dans ce cas $(v, f(v), ..., f^{k-1}(v))$ est une base de E et la matrice de f dans cette base est appelée *matrice compagnon*. Les coefficients $-a_0, ..., -a_{k-1}$ forment la dernière colonne de cette matrice. Son polynôme minimal est $m_f(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1x + a_0$ et est égal (au signe près) à son polynôme caractéristique.

.

7. Théorème. Le polynôme minimal de f est égal (au signe près) à son polynôme caractéristique si et seulement si f est cyclique: il existe un vecteur v tel que la famille $v, f(v), f^2(v), ..., f^{k-1}(v)$ est une base de E, où $k = \dim E$).

.

On a aussi un résultat plus fort:

8. Théorème. Pour tout endomorphisme f il existe un vecteur v tel que $m_v(x) = m_f(x)$.

.

Calcul du polynôme minimal III. Voici une autre méthod pour calculer le polynôme minimal.

On prend un vecteur $v \in E$, on calcule son polynôme minimal $m_v(x)$. Si $E_v = E$, on a $m_F(x) = m_v(x)$. Sinon on prend un autre vecteur w qui n'appartient pas à E_v, on calcule $m_w(x)$ et le $ppcm(m_v, m_w)$.

Si $E_v + E_w = E$, on a $m_f = ppcm(m_v, m_w)$ et on s'arrête; sinon on prend on vecteur qui n'appprtient pas à $E_v + E_w$ et on continue...

.

Voici quelques résultats supplémentaires (sans démonstration).

.

9. Théorème. Si deux matrices réelles sont semblables dans $\mathbf{C}$
($A = P^{-1}BP$ avec P complèxe), elles sont semblables dans $\mathbf{R}$
($A = Q^{-1}BQ$ avec Q réelle).

.

10. Théorème. Toute matrice est semblable à sa transposée.