Produit vectoriel.

Orientation.

Soit E un R-espace vectoriel de dimension finie.

On dit que deux bases (ordonnées) de E sont de même sens (ou de même orientation) si la matrice de passage d'une base à l'autre est de déterminant positif. Cela définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des bases et il y a exactement deux classes d'équivalence, appelées classes d'orientation. L'orientation de E est, par définition, le choix d'une classe d'orientation; les bases ordonnées dans cette classe sont des bases directes, les autres sont dites indirectes.

.

1. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On définit le **produit mixte** de 3 vecteurs u, v, w de E comme $\text{dét}_{\mathcal{B}}(u, v, w)$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe. Cette définition ne dépend pas du choix de la base orthonormale directe $\mathcal{B}$.

Les propriétés du produit mixte sont celles du déterminant.

1. Le produit mixte est linéaire par rapport à chaque variable u, v et w.
2. Le produit mixte est altérné (anti-symétrique).
3. $Det(u, v, w) = 0$ si et seulement si les vecteurs u, v et w sont coplanaires.
4. $\text{dét}_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1$.

.

2. Définition. Soit $u, v \in E$. Le **produit vectoriel** $u \wedge v$ est l'unique vecteur de E tel que pour tout $w \in E$ on a $< u \wedge v, w >= \text{dét}_{\mathcal{B}}(u, v, w)$.

.

Propriétés du produit vectoriel:

1. Le produit vectoriel est bilinéaire: $(au_1 + bu_2) \wedge v = a(u_1 \wedge v) + b(u_2 \wedge v)$ et $u \wedge (av_1 + bv_2) = a(u \wedge v_1 + b(u \wedge v_2)$.
2. Le produit vectoriel est anti-symétrique: $v \wedge u = -u \wedge v$.
3. $u \wedge v$ est orthogonal à u et v.

$u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires.

On a $< u \wedge v, w >=< u, v \wedge w >$.

4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe. Alors $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$.
5. Soit T une isométrie vectorielle de E. On a $(Tu) \wedge (Tv) = det(T)T(u \wedge v)$.
6. Si u et v sont orthogonaux, on a $\| u \wedge v \| = \| u \| \| v \|$.

En général,

$$\| u \wedge v \| = \| u \| \| v \| \sin \theta$$

où θ est l'angle de vecteurs u et v

7. On a

$$\| u \wedge v \|^2 + < u, v >^2 = \| u \|^2 \| v \|^2$$

8. Le produit vectoriel n'est pas associatif: le défault d'associativité est donné par l'identité de Jacobi:

$(u \wedge v) \wedge w - u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge w) \wedge v$

On a aussi $(u \wedge v) \wedge w = < u, w > v - < v, w > u$

.

3. Aires et volumes.

Soit $u, v \in E$. L'aire du parallelogramme construit sur les vecteurs u et v est $\| u \wedge v \|$.

Soit $u, v, w \in E$. Le volume du parallelopipède construit sur les vecteurs u, v et w est $\mid \text{dét}_{\mathcal{B}}(u, v, w) \mid = \mid < u \wedge v, w > \mid$.

.

4. Angles.

Soit E un espace vectoriel euclidien; soit u et v deux vecteurs non-nuls. L'angle α entre u et v est défini par les conditions

$$\cos \alpha = \frac{< u, v >}{\| u \| \| v \|}$$

et $0 \leq \alpha \leq \pi$.

L'angle α de deux doites vectorielles de vecteurs directeurs u et v est défini par les conditions $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ et $\cos \alpha = \frac{|< u, v >|}{\| u \| \| v \|}$.

.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. L'angle de deux doites affines dans un espace affine dirigé par Eest par définition l'angle entre entre leurs droites vectorielles directrices.

Cas particulier dim $E = 3$.

L'angle de deux plans est par définition l'angle de leurs droites normales.

L'angle d'une droite et d'un plan est tel que la somme de cet angle et de l'angle entre la droite et la la droite normale au plan est $\pi/2$.

.

5. Distance à un hyperplan affine.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien dirigé par E, soit $\mathcal{H}$ un hyperplan dans $\mathcal{E}$. Soit $A \in \mathcal{H}$ et $\vec{n}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\mathcal{H}$.

La distance d'un point $M \in \mathcal{E}$ à $\mathcal{H}$ est donnée par

$$d(M, \mathcal{H}) = \mid < \overrightarrow{AM}, \vec{n} > \mid$$

(la longueur de la perpendiculaire à $\mathcal{H}$ passant par M).

Si $\vec{v}$ est un vecteur non-nul orthogonal à $\mathcal{H}$, on a

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|< \overrightarrow{AM}, \vec{v} >|}{\| \vec{v} \|}$$

L'équation de $\mathcal{H}$ est donc $< \overrightarrow{AM}, \vec{v} >= 0$.

Expression en coordonnées dans un repère orthonormé $(O; e_1, ..., e_n)$: soit $\vec{v} = \sum_i v_i e_i$, soit $(a_1, ..., a_n)$ les cordonnées de A et $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de M.

Alors l'équation $M \in \mathcal{H}$ est $\sum_i v_i(x_i - a_i) = 0$, ou $\sum_i v_i x_i - p = 0$ (ici $p = \sum_i v_i a_i$).

La distance

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{\sum_i v_i x_i - p}{\sqrt{\sum_i v_i^2}}$$

6. Cas particuliers:

1. *Droite dans un plan.*

L'équation de la droite $ax + by - p = 0$;
vecteur normal $\vec{v} = ae_1 + be_2$;
distance du point (x, y) à la droite est

$$\frac{ax + by - p}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. *Plan dans R^3.*

L'équation du plan $ax + by + cz - p = 0$;
vecteur normal $\vec{v} = ae_1 + be_2 + ce_3$;
distance du point (x, y, z) au plan est

$$\frac{ax + by + cz - p}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3. *Plan dans R^3 défini par un point A et deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.*

Le point M appartient au plan si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. Le vecteur normal est donné par $\vec{v} = \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.

4. *Plan dans R^3 passant par trois points A, B, C.*

Le point M appartient au plan si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Le vecteur normal est donné par $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

5. *Droite $\mathcal{D}$ dans R^3 définie par un point A et un vecteur $\vec{u}$.*

Soit $M \in R^3$ et B le projeté orthogonale de M sur $\mathcal{D}$. On a

$d(M, \mathcal{D}) = \| \overrightarrow{BM} \|$.

Mais $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{u}$ donc $\| \overrightarrow{BM} \| \| \vec{u} \| = \| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \|$ et

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|}$$

[L'équation (vectorielle) de la droite $\mathcal{D}$ est donc $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = 0$.]

6. *Perpendiculaire commune à deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dans R^3; distance entre deux droites.*

Soit $\mathcal{D}_i$ définie par un point A_i et un vecteur directeur $\vec{u_i}$, $i = 1, 2$.

Le point courant de la droite $\mathcal{D}_i$ s'écrit comme $M_i = A_i + a_i\vec{u_i}$, $a_i \in R$.

La distance entre M_1 et M_2 est $\| \overrightarrow{M_1M_2} \|$.

On a $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{A_1A_2} - a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} = \vec{v} + \vec{u}$, où $\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_2}$ est fixe et $\vec{u} - a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2}$.

Si les droites sont parallèles (les vecteurs $\vec{u_2}$ et $\vec{u_2}$ colinéaires), la situation est claire.

Si les vecteurs $\vec{u_2}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u}$ est un vecteur arbitraire du plan engendré par les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. Donc minimiser $\| \overrightarrow{M_1M_2} \|$ est équivalent à effectuer la projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ dans le plan engendré par les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$. La solution est unique et correspond au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ orthogonal à $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ - c'est la perpendiculaire commune.

Soit $\vec{w} = \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$. Alors pour la perpendiculaire commune on a

$| < \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{w} > | = \| \overrightarrow{M_1M_2} \| \| \vec{w} \|$.

Mais $< \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{w} > = < \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{w} >$, d'où la formule pour la distance entre deux droites,

$$d(\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2) = \frac{| < \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}, \overrightarrow{A_1A_2} | >}{\| \vec{u_1} \wedge \vec{u_2} \|}$$

7. Coniques .

On considère la courbe Γ dans R^2 définie par une équation quadratique:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Par un changement orthogonale des coordonnées (en rédusant la forme quadratique aux axes principaux) on obtient l'équation

$\lambda u^2 + \mu v^2 + pu + qv + r = 0$.

Ici $\lambda + \mu = a + c$ et $\lambda\mu = ac - 4b^2$.

Forme réduite.

Cas "non-dégénéré". Si $\lambda\mu \neq 0$, on peut éliminer les termes pu et qv en ajoutant des constantes à u et v ce qui donne l'équation réduite:

$$\lambda u^2 + \mu v^2 = \gamma$$

1. $\lambda\mu = ac - 4b^2 > 0$. Soit $\lambda > 0$ (et donc $\mu > 0$); ceci est équivalent à $a > 0$. Alors Γ est une ellipse si $\gamma > 0$, un point si $\gamma = 0$ et vide si $\gamma < 0$.

2. $\lambda\mu = ac - 4b^2 < 0$. Alors Γ est une hyperbole (à deux branches) si $\gamma \neq 0$, une croix formée de deux droites si $\gamma = 0$.

Le centre de Γ dans le cas non-dégénéré est le seul point critique de la fonction quadratique qui figure dans l'équation; en coordonnées (x, y) il est donc donné comme la solution du système de deux équations $2ax+2by+d = 0$, $2bx + 2cy + e = 0$.

.

Cas "dégénéré". Soit $\lambda\mu = 0$. Soit $\lambda \neq 0$. Alors on peut éliminer le termes pu en ajoutant une constante à u, ce qui donne l'équation réduite:

$\lambda u^2 + qv = \gamma$. Si $q \neq 0$, c'est l'équation d'une parabole.