2. Produit scalaire. Espaces Euclidiens.

2.1. Soit E un R-espace vectoriel. Un **produit scalaire** dans E est une forme bilinéaire symétrique définie positive, noté $< .,. >$.

La **norme** associée est définie par $\| x \|^2 =< x, x >$.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz $| < x, y > | \leq \| x \| \| y \|$ entraine l'inégalité du triangle $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

La distance euclidienne d dans E est définie par $d(x, y) = \| x - y \|$.

Le produit scalaire est déterminé par la norme associée:

$$< x, y >= \frac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2)$$

("identité de polarisation").

Remarque: une norme dans E n'est pas en général associée à un produit scalaire.

Exemples: 1. Produit scalaire canonique dans R^n: $< x, y >= \sum_1^n x_i y_i$; la norme est donnée par le "théorème de Pythagore": $\| x \|^2 = \sum_1^n x_i^2$.

2. $E = C([a, b], R)$, $< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Un R-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire s'appelle **espace euclidien**.

.

2.2. Deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $< x, y >= 0$.

Sous-espace orthogonale. Soit $A \subset E$; **l'orthogonal** de A est l'ensemble de vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A:

$A^\perp = \{x \in E : \forall y \in A \text{ on a } < x, y >= 0\}$.

Il est claire que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Deux sous-espaces E_1 et E_2 sont **orthogonaux** si tout vecteur de E_1 est orthogonal à tout vecteur de E_2. Ceci est équivalent à dire que $E_2 \subset E_1^\perp$ ou que $E_1 \subset E_2^\perp$. Il est évident dans ce cas que $E_1 \bigcap E_2 = \{0\}$.

.

Famille orthogonale. Une famille de vecteurs de E est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs de E est dite **orthonormale** si elle est orthogonales et tous ses vecteurs sont de norme 1.

Lemme. Une famille orthogonale sans vecteurs nuls est libre.

D'une famille orthogonale $(e_1, ..., e_n, ...)$ on peut facilement passer à une famille orthonormale en normalisant les vecteurs e_i: $e_i' = \frac{e_i}{\|e_i\|}$.

.

Exemple. 1. Dans l'espace des fonctions continues $C([0, 2\pi], R)$ avec le produit scalaire $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ la famille $(1, \cos nx, \sin nx)_{n \geq 1}$ est orthogonale et la famille $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx)_{n \geq 1}$ est orthonormale.

2. Dans l'espace des fonctions continues $C([-1,1],R)$ avec le produit scalaire $< f,g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ la famille des polynômes

$(p_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n)_{n\geq 0}$ est orthogonale.

.

2.3. Coordonnées dans une base orthonormale.

Soit $(e_1,...,e_n)$ une base **orthonormale** , soit $x = \sum_1^n x_i e_i$, $y = \sum_1^n y_i e_i$. Alors $< x,y >= \sum_1^n x_i y_i$, $\| x \|^2 = \sum_1^n x_i^2$ ("théorème de Pythagore") et $x_i =< x, e_i >$.

Coordonnées dans une base **orthogonale:** $< x,y >= \sum_1^n < e_i,e_i > x_i y_i$

$\| x \|^2 = \sum_1^n < e_i,e_i > x_i^2$ et $x_i = \frac{<x,e_i>}{<e_i,e_i>}$.

.

2.4. Orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Soit $(v_1,...,v_n,...)$ une famille libre dans E. On peut construire une famille orthonormale $e_1,...,e_n,...$ telle que $Vect(v_1,...,v_k) = Vect(e_1,...,e_k)$ pour tout $k \geq 1$. (Autrement dit, e_k est une combinaison linéaire de $v_1,...,v_k$.)

.

Construction par récurrence:

On pose $e_1 = \frac{v_1}{\|v_i\|}$; $\tilde{e}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_1^k < v_{k+1}, e_i > e_i$ et $e_{k+1} = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\|\tilde{e}_{k+1}\|}$.

.

Corollaire. Tout espace Euclidien admet une base orthonormale. Toute famille orthonormale dans un espace Euclidien peut être complétée en une base orthonormale.

Remarque: le corollaire est faux en dimension infinie: l'espace des fonctions continues $C([a,b],R)$ n'admet pas de base orthogonale au sens algébrique.

.

2.5. Projection orthogonale.

Soit E un espace muni du produit scalaire et $F \subset E$ un sous-espace.

Motivation. On sait que $F \bigcap F^{\perp} = \{0\}$. Supposons que $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F, donc $E = F \bigoplus F^{\perp}$, somme directe orthogonale. (Ceci est toujours vrai en dimension finie.)

Le projecteur othogonal sur F, noté P_F, est par définition le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$. Si $x \in E$ on décompose $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$; alors, par définition, $P_F(x) = x_1$, la composante "orthogonale" de x dans F.

Noter que le projecteur orthogonal sur $F^{\perp}$ est $P_{F^{\perp}} = Id - P_F$.

.

Définition. Soit $F \subset E$ un sous-espace de dimension finie.

Soit $(e_1,...,e_n)$ une base **orthonormale** de F.

On définit $P_F : E \to E$ par $P_F(x) = \sum_1^n < x, e_i > e_i$. Alors on a

Lemme. P_F est un projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

•• *Démonstration.* Si $x \in F$, alors $P_F(x) = x$, donc $P_F^2 = P_F$. Donc P_F est un projecteur. Le noyau $\mathrm{Ker}(P_F) = \{x \in E :< x, e_i >= 0, i = 1, ..., n\} = \{x \in E :< x, y >= 0\}$ pour tout $y \in F$, donc $\mathrm{Ker}(P_F) = F^\perp$. ••

Corollaire. Si F est un sous-espace de dimension finie, $F^\perp$ est un supplémentaire de F: $E = F \bigoplus F^\perp$, somme directe orthogonale. On a aussi $(F^\perp)^\perp = F$.

.

Projection orthogonale dans une base quelconque.

Le vecteur $y = P_F(x)$ est caractérisé par les conditions

$y \in F$ et $< y, z >=< x, z >$ pour tout vecteur z de F.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de F. La dernière condition est donc équivalente à $< y, e_j >=< x, e_j >$, $j = 1, ..., n$.

Posons $P_F(x) = \sum_1^n y_i e_i$. pour déterminer les coefficients y_i on doit résoudre le système:

$\sum_1^n y_i < e_i, e_j >=< x, e_j >$, $j = 1, ..., n$.

La matrice de ce système $G = (< e_i, e_j >)$ s'appelle *matrice de Gram.* Soit $(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)$ une base orthonormale et $e_j = \sum_i a_{ij} \tilde{e}_i$, donc

$a_{ij} = (< \tilde{e}_i, e_j >)$. Soit $A = (a_{ij})$, alors $G =^t AA$. En particulier, G est définie positive et dét G= (dét $A)^2$.

.

2.6. Projection othogonale et meilleur approximation en moyenne quadratique. Distance à un sous-espace.

Lemme. Soit F est un sous-espace de dimension finie et $x \in E$. Alors la projection $P_F(x)$ réalise la distance minimale entre x et les vecteurs de F: $\| x - P_F(x) \| = \min \{\| x - z \|, z \in F\}$.

.

Exemple. Ajustement affine.

Soit $x_1 < x_2 < ... < x_n$ et $S = (x_1, ..., x_n)$.

Soit E l'espace des fonctions définies sur S à valeurs réelles.

Le produit scalaire dans E est défini par $< f, g >= \sum_1^n f(x_i)g(x_i)$;

Etant donné f, *l'ajustement affine par les moindres carrés* consite à déterminer une fonction affine $\phi(x) = ax + b$ telle que l'écart $\| f - \phi \|^2 = \sum_1^n [f(x_i) - \phi(x_i)]^2$ soit minimal.

La réponse est donnée par la projection orthogonal sur le sous-espace des fonctions affines. Les coefficients a et b sont les solutions du système linéaire: $< \phi, 1 >=< f, 1 >$, $< \phi, x >=< f, x >$. Plus explicitement,

$na + (\sum x_i)b = \sum f(x_i)$,

$(\sum x_i)a + (\sum x_i^2)b = \sum x_i f(x_i)$.

.

Exemple. Meilleure approximation en moyenne quadratique par des polynômes trigonométriques.

Un polynôme trigonométrique de dégré $\leq n$ est la somme $p(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$. Soit $f \in C([0, 2\pi])$ une fonction continue. On cherche on polynôme trigonométrique p de degré $\leq n$ tel que l'écart $\int_0^{2\pi}(f(t) - p(t))^2 dt$ soit minimal.

La réponse est donnée par la projection orthogonal dans $C([0, 2\pi])$ sur le sous-espace des polynômes trigonométriques de dégré $\leq n$; le produit scalaire est $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. On a la famille orthogonale: $(1, \cos nx, \sin nx)_{n\geq 1}$. On en déduit les coefficients du polynôme $p(t)$ de meilleure approximation: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt$.

.

2.7. Inégalité de Bessel et égalité de Bessel-Parseval.

Soit E un espace Euclidien, soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthonormale.

Soit $x \in E$ et $x_i =< x, e_i >$. Il est claire que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \| x \|^2$.

.

Lemme. Soit $x \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \| x \|^2$.

(ii) $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

(iii) x appartient à l'espace vectoriel engendré par $(e_1, ..., e_n)$ (donc x est une cobinaison linéare des vecteurs $e_1, ..., e_n$).

.

Soit maintenant $\dim(E) = \infty$.

Théorème. Soit $(e_1, ..., e_n, ...)$ une famille orthonormale infinie, $x \in E$ et $x_i =< x, e_i >$.

A. Pour tout n on a $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \| x \|^2$

et la série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ converge.

B. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = \| x \|^2$.

(ii) $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

(iii) x appartient à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par la suite $(e_1, ..., e_n, ...)$.

.

Egalité de Bessel-Parseval dans une "base" orthogonale.

Si $(e_1, ..., e_n, ...)$ est une famille orthogonale et x appartient à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par la suite $(e_1, ..., e_n, ...)$, alors

$\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<x, e_i>^2}{<e_i, e_i>}$.

.

Exemple: séries de Fourier. Avec le produit scalaire $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ dans $C([0, 2\pi])$ la famille $(1, \cos nt, \sin nt)_{n\geq 1}$ est orthogonale; les combinaisons linéaires des ses fonctions - les polynômes trigonométriques - sont denses dans $C([0, 2\pi])$. Soit $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)dt$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)dt$. On a l'égalité de Parseval:

$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.