

Equation non homogène: méthode de la variation des constantes.

On considère l'équation non-homogène:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) + b(t)$$

2.9. "Principe de superposition": a) Soit $x' = Ax + b_1$ et $y' = Ay + b_2$. Alors $z(t) = x(t) + y(t)$ vérifie $z' = Az + (b_1 + b_2)$.

b) Toute solution de l'équation non-homogène $x' = Ax + b(t)$ est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène $y' = Ay$.

On cherche la solution $x(t)$ sous la forme $x(t) = e^{tA}y(t)$. On obtient pour $y(t)$ l'équation $y'(t) = e^{-tA}b(t)$, d'où la solution $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds$. On remarque que $y(t_0) = e^{-t_0A}x(t_0)$.

2.10. Formule de Duhamel:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds$$

Dans cette formule $x(t)$ est la somme de deux termes: $u(t) = \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds$ est la solution particulière de l'équation $x' = Ax + b(t)$ vérifiant la condition initiale $u(t_0) = 0$ et $v(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0)$ est la solution de l'équation homogène vérifiant la condition initiale $v(t_0) = x(t_0)$.

2.11. Corollaire: l'existence et l'unicité. Soit $b : I \rightarrow K^n$ une fonction continue définie sur un intervalle I . Pour tout $x_0 \in K^n$ et $t_0 \in I$ il existe une solution unique $x(t)$ de l'équation $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) + b(t)$ définie sur I à valeurs dans K^n vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Equation scalaire d'ordre n .

$$\frac{d^n}{dt^n}x + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + \dots + a_1\frac{d}{dt}x + a_0x = 0(*)$$

A l'équation (*) on peut associer un système différentiel équivalent d'ordre 1 en introduisant de nouvelles inconnues: $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_n = x^{(n-1)}$. Le système s'écrit $x'_1 = x_2$, ..., $x'_{n-1} = x_n$, $x'_n = -(a_0x_1 + \dots + a_{n-1}x_n)$. En notation vectorielle cela donne $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = (x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$ et $A = (a_{ij})$ est la matrice "compagnon":

$a_{i,i+1} = 1$, $a_{n,j} = -a_{j-1}$ et les autres éléments de A sont nuls.

On sait que le polynôme caractéristique de A est

$$p_A(z) = (-1)^n(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0),$$

et on sait que le polynôme minimal est égal (au signe près) au polynôme caractéristique; soit $p_A(z) = (-1)^n(z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_k)^{m_k}$.

Donc pour chaque valeur propre λ_i l'indice de nilpotence dans le sous-espace caractéristique associé est égal à m_i . (Noter que les espaces propres sont tous de dimension 1.) On en déduit:

2.12. Proposition. Soit $p_A(z) = (-1)^n(z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_k)^{m_k}$. Les fonctions $t^{p_j} e^{\lambda_j t}$, où $j = 1, \dots, k$ et $0 \leq p_j < m_j$ forment une base (complexe) des solutions de l'équation (*).

Toute solution s'écrit donc comme $\sum_{j=1}^k q_j(t) e^{\lambda_j t}$, où $q_j(t)$ sont des polynômes, $\deg(q_j) < m_j$.

Remarque. A chaque racine λ de l'équation $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$ est associée une solution exponentielle $x(t) = e^{\lambda t}$. Réciproquement, on obtient l'équation caractéristique $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ en exigeant que la fonction $x(t) = e^{\lambda t}$ vérifie l'équation différentielle.

Si les coefficients a_0, \dots, a_{n-1} sont réels, une base des solutions réelles est donnée par les fonctions $t^{p_j} e^{\lambda_j t}$ (pour les λ_j réelles) et $t^{p_j} e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t)$ et $t^{p_j} e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t)$ (pour les λ_j complexes, où $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$) et $0 \leq p_j < m_j$.

En vu de ce résultat, on n'a pas besoin de passer par la matrice, mais on peut traiter l'équation (*) directement:

2.13. Lemme. λ est une racine du polynôme caractéristique

$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ de multiplicité m si et seulement si les "monômes" $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$ vérifient l'équation différentielle (*).

●● *Démonstration.* Faisons dans l'équation (*) la substitution suivante : $x(t) = u(t)e^{\lambda t}$. On a $\frac{d}{dt}(ue^{\lambda t}) = (\frac{d}{dt}u + \lambda u)e^{\lambda t} = (\frac{d}{dt} + \lambda)ue^{\lambda t}$.

Donc l'équation (*) devient

$$(\frac{d}{dt} + \lambda)^n u + a_{n-1}(\frac{d}{dt} + \lambda)^{n-1}u + \dots + a_1(\frac{d}{dt} + \lambda)u + a_0u = 0 \quad (**)$$

ou, si on développe,

$$u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_0u = 0.$$

Pour le polynôme caractéristique $\tilde{p}(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0$ de (**), on a $\tilde{p}(z) = p(z + \lambda)$ (facile à vérifier). Donc λ est une racine de $p(z)$ de multiplicité m si et seulement si 0 est une racine de $\tilde{p}(z)$ de multiplicité m , ce qui veut dire que $b_0 = 0, \dots, b_{m-1} = 0$.

L'équation (**) devient $u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_m u^{(m)} = 0$ et admet donc des solutions $1, t, \dots, t^{m-1}$. Réciproquement, si (**) admet des solutions $1, t, \dots, t^{m-1}$, alors $b_0 = 0, \dots, b_{m-1} = 0$ et 0 est une racine de $\tilde{p}(z)$ de multiplicité m . ●●

Démarche à suivre: pour résoudre l'équation scalaire (*) avec la condition initiale $x(0) = c_1, x'(0) = c_2, \dots, x^{(n-1)}(0) = c_n$ il faut

1) résoudre l'équation caractéristique $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$ qui se déduit directement de l'équation différentielle, sans passer par la matrice;

2) écrire la solution comme une combinaison linéaire des solutions de base explicitées dans la Proposition 1.10 avec des coefficients indéterminés et calculer les coefficients afin de satisfaire les conditions initiales (cela revient à résoudre un système d'équations linéaires).

Equation scalaire non homogène d'ordre n

On considère l'équation

$$\frac{d^n}{dt^n}x + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + \dots + a_1\frac{d}{dt}x + a_0x = f(t)(*)$$

2.14. Réduction d'ordre.

Cherchons la solution sous la forme $x(t) = e^{\lambda t}u(t)$. Notre équation devient

$$e^{\lambda t}[u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_1u' + b_0u] = f(t)$$

(Voir la démonstration du Lemme 2.12.)

Soit λ une racine de multiplicité m de l'équation caractéristique

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0. \text{ Alors } b_0 = 0, \dots, b_{m-1} = 0.$$

Posons $y(t) = u^{(m)}(t)$; il reste à résoudre l'équation d'ordre $n - m$:

$$y^{(n-m)} + b_{n-1}y^{(n-2)} \dots + b_my = e^{-\lambda t}f(t)$$

En itérant cette procédure de réduction d'ordre on arrive à la fin à une équation de la forme $v'(t) = g(t)$.

Remarque. On vérifie facilement que le polynôme caractéristique

$\tilde{p}(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_1z + b_0$ est lié au polynôme caractéristique $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ par $\tilde{p}(z) = p(z + \lambda)$. (Voir Lemme 2.12.)

Exemple d'ordre 2: $x'' + ax' + bx = f(t)$. L'équation caractéristique est $z^2 + az + b = 0$. Soit $z^2 + az + b = (z - \lambda)(z - \mu)$.

On pose $x(t) = e^{\lambda t}u(t)$, ce qui donne
 $u'' + (2\lambda + a)u' = e^{-\lambda t}f(t)$, ou $u'' + (\lambda - \mu)u' = e^{-\lambda t}f(t)$

1. Si $\lambda = \mu$, l'équation devient $u'' = e^{-\lambda t}f(t)$.
2. Si $\lambda \neq \mu$, on pose $u'(t) = e^{(\mu-\lambda)t}y(t)$. Alors l'équation $u'' + (\lambda - \mu)u' = e^{-\lambda t}f(t)$ devient $y' = e^{-\mu t}f(t)$.

Solution particulière:

$$y(s) = \int_0^s e^{-\mu r} f(r) dr,$$

$$u(t) = \int_0^t e^{(\mu-\lambda)s} y(s) ds = \int_0^t e^{(\mu-\lambda)s} [\int_0^s e^{-\mu r} f(r) dr] ds.$$

En échangeant l'ordre d'intégration on obtient finalement la solution

$$x(t) = \frac{1}{\lambda - \mu} \int_0^t f(r) [e^{\lambda(t-r)} - e^{\mu(t-r)}] dr.$$

2.15. Utilisation de la formule de Duhamel.

A l'équation (*) on peut associer un système différentiel équivalent d'ordre 1 en introduisant de nouvelles inconnues: $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_n = x^{(n-1)}$. Le système s'écrit $x'_1 = x_2, \dots, x'_{n-1} = x_n, x'_n = -(a_0 x_1 + \dots + a_{n-1} x_n) + f(t)$, donc $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + b(t)$ où $\mathbf{x} = {}^t(x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$, $b(t) = {}^t(0, \dots, 0, f(t))$ et A est la matrice compagnon: $a_{i,i+1} = 1$, $a_{n,j} = -a_{j-1}$ et les autres éléments de A sont nuls.

On va écrire e^{tA} en supposant que l'équation caractéristique à n racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ est une base des solutions de l'équation (*). A partir de cette base on peut fabriquer une solution fondamentale $\Phi(t)$ de l'équation $U' = AU$: $\Phi(t)_{ij} = (e^{\lambda_i t})^{(j-1)} = \lambda_i^{j-1} e^{\lambda_i t}$. Par conséquent, $e^{tA} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)$. [Noter que $\Phi(0)_{ij} = \lambda_i^{j-1}$.]

Ensuite on utilise la formule de Duhamel: pour la première composante $x(t)$ du solution vectorielle $\mathbf{x}(t)$ on a $x(t) = \sum_j (e^{tA})_{1j} c_j + \int_0^t (e^{(t-s)A})_{1n} f(s) ds$. (c_1, \dots, c_n) est le vecteur des conditions initiales: $x(0) = c_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = c_n$.

”Quasipolynômes”

Souvent le second membre $f(t)$ dans l'équation (*) est de la forme $q(t)e^{\mu t}$, où $q(t)$ est un polynôme en t :

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = q(t)e^{\mu t} (*)$$

Proposition 2.14. Soit $q(t)$ un polynôme de degré d . Si μ est une racine de l'équation caractéristique de multiplicité m , il existe une solution particulière (complexe) de la forme $u(t) = r(t)e^{\mu t}$ où $r(t)$ est un polynôme de degré $d + m$.

(Donc si μ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, $m = 0$, il existe une solution particulière de la forme $u(t) = r(t)e^{\mu t}$, où $r(t)$ est un polynôme de degré d .)

•• *Démonstration.*

Faisons dans l'équation (*) la substitution suivante : $x(t) = u(t)e^{\lambda t}$. On a $\frac{d}{dt}(ue^{\lambda t}) = (\frac{d}{dt}u + \lambda u)e^{\lambda t} = (\frac{d}{dt} + \lambda)ue^{\lambda t}$.

Donc l'équation (*) devient

$$e^{\mu t}[(\frac{d}{dt} + \lambda)^n u + a_{n-1}(\frac{d}{dt} + \lambda)^{n-1}u + \dots + a_1(\frac{d}{dt} + \lambda)u + a_0u] = q(t)e^{\mu t}$$

ou, si on développe,

$$u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_0u = q(t).$$

Considérons l'application linéaire L définie dans l'espace des polynômes par

$$L(u) = u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_0u$$

Evidemment, $\deg(L(u)) \leq \deg(u)$. En plus, si μ est une racine de l'équation caractéristique de multiplicité m , on a $b_0 = 0, \dots, b_{m-1} = 0$ et donc $\deg(L(u)) \leq \deg(u) - m$. (Voir Lemme 2.12.)

Donc pour tout k , L définit un endomorphisme de l'espace $E_k = C_k[x]$ des polynômes de degré $\leq k$. On sait que

1. $L(E_k) \subseteq E_{k-m}$ (parce que $\deg(L(u)) \leq \deg(u) - m$);
2. $\text{Ker}(L) = E_{m-1}$ (parce que les polynômes vérifiant l'équation $u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_mu^{(m)} = 0$ sont précisément les polynômes de degré $< m$).

Noter que $\dim E_k = k + 1$. Soit $k \geq m$. La formule du rang $\dim(\text{Ker}L) + \dim(\text{Im}L) = \dim E_k$ dans l'espace E_k entraîne $\dim L(E_k) = k - m + 1$, donc $\dim L(E_k) = \dim E_{k-m}$. Conclusion: $L(E_k) = E_{k-m}$, donc pour tout polynôme $q(t)$ de degré d il existe un polynôme $u(t)$ de degré $k = d + m$ tel que $L(u) = q$. ••

Remarque: Pour déterminer le polynôme $r(t)$ il suffit de mettre $u(t) = r(t)e^{\mu t}$ dans l'équation.