3. Formes bilinéaires et endomorphismes.

3.1. Soit E un espace Euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale.

Soit $f \in L(E)$, $f(e_j) = \sum_i a_{i,j} e_i$ et $A = (a_{ij})$ la matrice de f.

On définit la forme associée: $\varphi_f(x, y) =< x, f(y) >$. La matrice de φ_f dans la base B est: $(< e_i, f(e_j) >) = (a_{ij}) = A$. La correspondance entre f et φ_f est donc une bijection linéaire entre l'espace des endomorphismes et l'espace des formes bilinéaires.

Si on écrit $\psi_f(x, y) =< f(x), y >$, alors la matrice de ψ_f est la transposée de A: $< f(e_i), e_j >= a_{ji}$. Il existe donc un unique endomorphisme f^* tel que $< x, f(y) >=< f^*(x), y >$ pour tous $x, y \in E$.

Définition. L'endomorphisme f^* tel que $< x, f(y) >=< f^*(x), y >$ s'appelle **l'adjoint** de f; sa matrice dans une base orthonormale est la transposée de la matrice de f.

Définition. L'endomorphisme f est dit **auto-adjoint** ou **symétrique** si $f^* = f$. L'endomorphisme f est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

.

Exemple. Une projection orthogonale est symétrique.

.

3.2. *Propriétés de l'adjoint.* L'application $f \to f^*$ est linéaire; $(f^*)^* = f$, $(fg)^* = g^* f^*$ et $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

Lemme. (1) L'orthogonal d'un sous-espace stable par f est stable par f^*.

(2) Ker $f^* =$ (Im $f)^\perp$ et Im $f^* =$(Ker $f)^\perp$.

.

Corollaire. Si f est symétrique, alors Ker f = (Im $f)^\perp$ et E est la somme orthogonale de Ker f et Im f. L'orthogonal d'un sous-espace stable par f est stable par f.

.

3.3. Diagonalisation des matrices symétriques.

Proposition. Soit f un endomorphisme auto-adjoint. Alors

(i) Toutes les valeurs propres de f sont réelles.

(ii) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

(iii) f est diagonalisable dans une base orthonormale.

.

3.4. Un endomorphisme symétrique f est dit **positif** (respectivement, **défini positif**) si la forme associée $< x, f(y) >$ est positive (respectivement, défini positive).

La proposition précédente montre que'un endomorphisme symétrique est positif (respectivement, défini positive) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement, stictement positives).

Une matrice symétrique A est dit **positive** (respectivement, **défini positive**) si ${}^tXAX \geq 0$ pour tout $X \in R^n$ (respectivement, ${}^tXAX > 0$ pour tout X non-nul).

.

Exemple: racine carré d'une matrice positive. Soit f un endomorphisme positif, Π_i le projecteur spectral associé à la valeur propre λ_i, $i = 1, ..., k$. On a $f = \sum \lambda_i \Pi_i$. Posons $g = \sum \sqrt{\lambda_i} \Pi_i$. Alors g est symétrique positif et $g^2 = f$. On montre facilement qu'une telle racine carré positive $\sqrt{f} = g$ est unique.

.

3.5. Diagonalisation d'une forme quadratique dans une base orthonormale.

Soit q une forme quadratique et soit f un endomorphisme auto-adjoint tel que $q(x) =< x, f(x) >$. On a vu que dans une base orthonormale q et f ont la même matrice. Donc dans une base orthonormale de vecteurs propres de f la matrice de q est diagonale et q est une combinaison linéaire de carrés.

Proposition. *"Réduction aux axes principaux".* Pour toute forme quadratique q il existe une une base orthonormale dans laquelle la matrice de q est diagonale et q est une combinaison linéaire de carrés: $q(x) = \sum_1^n a_i x_i^2$. Les coefficients a_i sont les valeurs propres de l'endomorphisme auto-adjoint f associé ($q(x) =< x, f(x) >$).

On peut reformuler ce résultat comme la *diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques:* la forme q et le produit scalaire $< x, x >$.

.

4. Transformations orthogonales.

4.1. Soit E un espace Euclidien.

Un endomorphisme U de E est **orthogonal** (est une isométrie linéaire) si U préserve le produit scalaire: $< Ux, Uy >=< x, y >$ pour tout $x, y \in E$.

.

Proposition. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) U est orthogonal.

(ii) U préserve la norme: $\| Ux \| = \| x \|$ pour tout $x \in E$.

(iii) U transforme toute base orthonormale en base orthonormale.

(iv) U transforme une base orthonormale en base orthonormale.

Un endomorphisme orthogonal est injectif, donc inversible
(dim $E < \infty$!). Son inverse est aussi orthogonal.

.

4.2. L'égalité $< Ux, Uy >=< x, y >$ s'écrit aussi

$< U^*Ux, y >=< x, y >$ ce qui est équivalent à $U^*U = I_n$. Donc U est orthogonal si et seulement si $U^*U = I_n$, ou encore ssi $U^{-1} = U^*$.

Une **matrice orthogonale** est la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale. Une matrice orthogonale U est caractérisée par la relation ${}^tUU = U^tU = I_n$ qui signifie que les colonnes de A (aussi que ses lignes) constituent une base orthonormale par rapport au produit scalaire canonique dans R^n.

.

4.3. *Transformations orthogonales et diagonalisation d'une forme quadratique dans une base orthonormale.*

Soit A la matrice d'une forme quadratique q dans une base $\mathcal{B}$; soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une autre base $\mathcal{B}'$. Alors la matrice de la forme q dans la base $\mathcal{B}'$ est $A' =^t PAP$. Si les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormales, P est orthogonale: ${}^tP = P^{-1}$ et on a $A' =^t PAP = P^{-1}AP$. Donc la matrice d'une forme se transforme comme la matrice d'un endomorphisme si le changement de coordonnées est orthogonal. Cela montre encore une fois que la diagonalisation d'une forme quadratique par une transformation orthogonale demande la recherche des valeurs et des vecteurs propres de A.

.

4.4. Symétrie par rapport à un sous-espace. Réflexions.

Soit F un sous-espace de E et $E = F \bigoplus F^\perp$ la décomposition orthogonale. Pour $x \in E$ on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. La **symétrie** s_F par rapport à F est définie par $s_F(x) = x_1 - x_2$.

Une symétrie par rapport à un hyperplan s'appelle **réflexion**. Si F estt un hyperplan et e le vecteur unitaire orthogonal à F, la reflexion par rapport au F s'écrit $s_F(x) = x - 2 < x, e > e$.

Proposition. Toute transformation orthogonale dans R^n s'écrit comme un produit d'au plus n réflexions.

.

4.5. Réduction des endomorphismes orthogonals.

Proposition. Soit U un endomorphisme orthogonal.

(i) Si le sous-espace F est stable par U, alors $F^\perp$ est stable par U.

(ii) Toute valeur propre de U est de module 1.

(iii) E se décompose en somme orthogonale des sous-espaces stables par U de dimension 1 ou 2.

.

Transformations orthogonales en petite dimension.

Dimension 1. $Ux = x$ ou $Ux = -x$.

Dimension 2. a) dét $U > 0$: U est une rotation.

Sa matrice est $U = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

b) dét $U < 0$: U est une réflexion.

Sa matrice est $U = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

.

Dimension 3. a) dét $U > 0$: U est une rotation autour d'un axe.

b) dét $U < 0$: U est une réflexion composée avec une rotation autour de l'axe orthogonal au plan de réflexion.

Remarquer qu'il y a (au moins) une valeur propre réelle.

.

4.6. Décompositon polaire.

Théorème. Soit f un endomorphisme inversible. Il existe l'unique endomorphisme orthogonal U et l'unique endomorphisme défini positif S tels que $f = US$.

Construction: On pose $S = \sqrt{f^*f}$; S est défini positif. On définit U par $U = fS^{-1}$ et on vérifie que U est orthogonal: $U * U = S^{-1}f * fS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = Id$.

.

4.7. Orthogonalisation de Gram-Schmidt et la décomposition orthogonale-triangulaire (décomposition QR).

Théorème. Soit A une matrice inversible. Il existe l'unique matrice orthogonale Q et l'unique matrice triangulaire supérieure R avec une diagonale positive telles que $A = QR$.

Construction: La matrice ${}^tAA$ est définie positive. Soit ${}^tAA =^t RR$ la décomposition de Cholesky, où R est triangulaire supérieure. On définit Q par $Q = AR^{-1}$ et on vérifie que Q est orthogonal: ${}^tQQ =^t R^{-1}.{}^tAAR^{-1} =^t R^{-1}.{}^tRRR^{-1} = Id$.

.

La décomposition QR est liée à l'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Soit $v_1, ..., v_n$ les colonnes de A, $e_1, ..., e_n$ les colonnes de Q et $B = R^{-1}$ (B est triangulaire supérieure et $(e_1, ..., e_n\ )$ est une base orthonormale).

La relation $A = QR$ est équivalente à $Q = AB$ qui s'écrit en termes des colonnes de façon suivante:

$e_1 = b_{11}v_1$,

$e_2 = b_{12}v_1 + b_{22}v_2$,

....

$e_k = \sum_{i=1}^{k} b_{ik}v_i$

Donc e_k est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, ..., v_k$ pour tout $k \geq 1$.