Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015
Cursus préparatoire, semestre 2 : algèbre

Feuille d'exercices numéro 2
POLYNÔMES

Sauf précision contraire, tous les polynômes considérés seront à coefficients complexes.

Exercice 2.1 Déterminer tous les polynômes P vérifiant les relations suivantes

1. $P(X^2+1) = P(X)$,
2. $P(2X+1) = P(X)$,
3. $(1-X)P'(X) - P(X) = X^n$, où $n \in \mathbf{N}$,
4. $P'(X)^2 = 4P(X)$,
5. $P(P(X)) = P(X)$.

Exercice 2.2
Soient a, b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$?

Exercice 2.3 Polynômes de Tchebychev
On considère la suite de polynômes $P_n(x)$ définie par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, et pour $n \in \mathbf{N}$,

$$P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser P_2, P_3, P_4.
2. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n.
3. Étudier la parité de P_n.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on a $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Exercice 2.4
Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes qui le divisent dans l'anneau des polynômes précisé :

1. $X + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$,
2. $X^2 - 1$ dans $\mathbf{R}[X]$,
3. $X^2 + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$,
4. $X^2 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 2.5

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 2.6
Quelles sont les racines (dans $\mathbf{C}$, dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{Q}$) des polynômes suivants ?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$,
2. $X^n - 1$, où n est un entier,
3. $X^6 - 4$,
4. $X^4 - 13X^2 + 36$,
5. $X^4 + 6X^2 + 25$.

Exercice 2.7
Soit P un polynôme, et soient a et b deux réels distincts. Soient λ (respectivement, μ) le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X-a$ (respectivement, par $X-b$). Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)$. Commenter le cas $\lambda=\mu=0$.

Exercice 2.8
Calculer le PGCD unitaire des couples de polynômes (P,Q) suivants, puis en déduire la factorisation de P et Q dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$

1. $P(X)=(X-1)^2(X+2)^3(X^2+1)^4$ et $Q(X)=(X-1)(X+7)^3(X^2+1)$.
2. $P(X)=X^7+2X^6-X-2$ et $Q(X)=X^3+X^2-2X$.
3. $P(X)=nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ et $Q(X)=X(X-1)^2(X-2)$.
4. $P(X)=X^5-X^4+X^3-X^2+X-1$ et $Q(X)=X^7+X^5+8X^4+X^3+8X^2+8$.

Exercice 2.9
Soient les polynômes $A(X)=X^5-X^4+2X^3+1$ et $B(X)=X^5+X^4+2X^2-1$. Calculer leur PGCD unitaire. En déduire un couple de polynômes (U_0,V_0) vérifiant l'identité de Bézout. Déterminer tous les couples de polynômes (U,V) vérifiant cette identité.
Reprendre l'exercice avec $A(X)=X^4-X^3+2X^2-2X+1$ et $B(X)=X^3-X^2+2X-1$.

Exercice 2.10
Déterminer un polynôme P de degré 5 tel que $P(X)+1$ soit divisible par $(X-1)^3$ et $P(X)-1$ soit divisible par $(X+1)^3$.

Exercice 2.11
Calculer $P(X)=(X^3-X^2+1)(X^2+X+1)$. En déduire une factorisation de X^5+X-1, et une preuve que 100009 n'est pas un nombre premier.

Exercice 2.12
Établir les identités, pour $n\in\mathbf{N}^*$

$$X^n-1=(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X+1),$$

$$X^{2n+1}+1=(X+1)(X^{2n}-X^{2n-1}+X^{2n-2}-\cdots+(-1)^pX^p\cdots-X+1).$$

En déduire les résultats suivants

1. Si le nombre de Mersenne $M_n=2^n-1$ est premier, alors n est premier.
2. Si le nombre de Fermat $F_n=2^n+1$ est premier, alors n est soit nul, soit une puissance de 2.

Exercice 2.13
Déterminer le PGCD de $X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ et de X^4-1, considérés comme éléments de $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 2.14
Pour quels entiers n le polynôme $X^{2n}+X^n+1$ est-il divisible par X^2+X+1 (dans $\mathbf{R}[X]$) ?

Exercice 2.15
Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles

1. $X^n+X^{n-1}+\cdots+1$ dans $\mathbf{C}[X]$,
2. $X^{11}+2^{11}$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$,
3. X^4+4 dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$, et enfin dans $\mathbf{Q}[X]$,
4. X^4-j dans $\mathbf{C}[X]$, où $j=\exp(2\imath\pi/3)$.
5. X^8+X^4+1 dans $\mathbf{R}[X]$.
6. X^5-1 dans $\mathbf{R}[X]$.