Réduction des endomorphismes.

.

Diagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K et f un endomorphisme de E. Le but de réduction est de chercher des bases dans E dans lesquelles la forme de la matrice associée à f est la plus simple possible. Si f est déja donné par une matrice $A = M_B(f)$ dans une base B, il s'agit de passer à une autre base B' de façon à ce que la nouvelle matrice $A' = M_{B'}(f) = P^{-1}AP$ soit "simple".

La forme la plus simple d'une matrice est la forme diagonale.

1.1. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** si il admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

.

Vecteurs propres, valeurs propres

.

Si $B = (e_1, ..., e_n)$ alors $M_B(f) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ signifie que
$f(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, ..., n$.

1.2. Définition: Un **vecteur propre** de f est vecteur **non-nul** v tel que $f(v)$ est colinéaire à v: $f(v) = \lambda v$; le coefficient de proportionalité λ est la **valeur propre** associée. Un scalaire λ est une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$.

La matrice de l'endomorphisme dans une base de vecteurs propres est diagonale, avec les valeurs propres sur la diagonale principale.

Une reformulation de la définition de la diagonalisabilité:

1.1bis. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** si il existe une base de vecteurs propres.

L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle **spectre** de f.

Remarque. Si v est un vecteur propre, tout vecteur non-nul colinéaire à v est aussi un vesteur propre (avec la même valeur propre).

1.3. Théorème. *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants.*

• • *Démonstration.* Soit $f(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, ..., n$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Supposons par absurde que la famille $v_1, ..., v_n$ est liée. Soit k tel que les vecteurs $v_1, ..., v_k$ sont linéairement indépendents et $v_1, ..., v_k, v_{k+1}$ sont liés. Donc

$v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$. (*)

On a $f(v_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(v_i)$, donc

$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i$. (**)

On multiplie l'égalité (*) par λ_{k+1}:

$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{k+1} \lambda_i v_i$. (***)

et on soustrait (**) de (***). Cela donne

$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i)v_i$

On note que $\lambda_{k+1} - \lambda_i \neq 0$ et que parmi les coefficients α_i il y a des coefficients non-nuls.

Par conséquent, les vecteurs $v_1, ..., v_k$ sont liés. Cela donne une contradiction à l'hypothèse de départ. • •

.

1.4. Corollaire. Soit $n = \dim(E) < \infty$. Alors

1. f admets au plus n valeurs propres.

2. Si f admet exactement n valeurs propres (deux à deux distinctes), f est diagonalisable.

• • *Démonstration.*

1. Le nombre de vecteurs de E linéairement indépendents ne dépasse pas la dimension de E.

2. Les n vecteurs propres associés sont linéairement indépendents et donc forment une base de E. • •

.

A la recherche des vecteurs propres: polynôme caractéristique.

Soit $\dim(E) < \infty$. On remarque que λ est une valeur propre si et seulement si $f - \lambda Id$ n'est pas injectif: $Ker(f - \lambda I) \neq \{0\}$. En dimension finie cette condition est équivalente à l'annulation du déterminant:

dét $(f - \lambda Id) = 0$. C'est **l'équation caractéristique** pour les valeurs propres.

[Rappel: $det(f - \lambda Id)$ est défini comme $det(M_B(f) - \lambda I_n)$ par rapport à une base B; noter que I_n est la matrice de l'identité Id dans n'importe quelle base.]

.

1.5. Définition. Le déterminant $p_f(x) =$ dét $(f - xId)$ s'appelle **polynôme caractéristique** de f: c'est est un polynôme en x de degré $n = \dim(E)$.

.

On conclut que **les valeurs propres sont précisement les racines du polynôme caractéristique.**

[Parfois on définit le polynôme caractéristique comme

dét$(xId - f) = (-1)^n p_f(x)$.]

Le polynôme caractéristique d'une matrice A est $p_A(x) =$ dét $(A - xI_n)$. Les matrices semblables A et $P^{-1}AP$ ont le même polynôme caractéristique.

.

Remarque: on a $p_{f+aId}(x) = p_f(x - a)$. Si f est diagonalisable, $f + aId$ l'est aussi ($a \in K$); les valeurs propres de $f + aId$ s'obtiennent en ajoutant

a aux valeurs propres de f.

.

1.6. Polynôme caractéristique d'une matrice diagonale: si $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

Donc une condition nécessaire pour que f soit diagonalisable est que p_f soit scindé (vérifiée automatiquement si $K = \mathbf{C}$). Voici une condition suffisante:

.

1.7. Corollaire. Si p_f admet n racines distinctes (donc p_f est scindé à racines simples), f est diagonalisable.

• • *Démonstration.* Voir le Corollaire 1.4. • •

.

Remarque: Un polynôme "générique" n'a pas de racines multiples, donc un polynôme "générique" dans $\mathbf{C}$ admet n racines distinctes et un endomorphisme "générique" f est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

.

1.8. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire:

Le déterminant d'une matrice triangulaire et le produit de ses éléments diagonaux, donc pour le polynôme caractéristique on a

$p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - a_{ii})$.

.

Exemples de matrices non-diagonalisables.

Soit A une matrice triangulaire avec $a_{11} = ... = a_{nn} = a$. Si A est diagonalisable, alors A est semblable à aI_n et donc $A = aI_n$. Par conséquent, une matrice triangulaire avec les mêmes éléments sur la diagonale est diagonalisable seulement si elle est déja diagonale.

.

1.9. Exemple en dimension 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$

Alors $p_A(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = x^2 - tr(A)x + det(A)$.

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}((a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc})$.

Soit $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$ le discriminant.

1. $K = \mathbf{C}$. Si $\Delta \neq 0$, on a deux valeurs propres distinctes et A est diagonalisable. On peut écrire les vecteurs propres comme v_k=$\begin{pmatrix} b \\ \lambda_k - a \end{pmatrix}$ ou v_k=$\begin{pmatrix} \lambda_k - d \\ c \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$.

2. $K = \mathbf{R}$. Si $\Delta > 0$, on a deux valeurs propres **réelles** distinctes et A est diagonalisable (sur R).

Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racines réelles et A n'est diagonalisable sur R. On peut réduire A par similitude à la forme $A' = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ -\beta, \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha = (a+d)/2$ et $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$.

• • En effet, soit $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ les valeurs propres de A et w et $\overline{w}$ des vecteurs propres associés: $Av = \lambda w$ et $A\overline{w} = \overline{\lambda}\overline{w}$.

Les vecteurs w et $\overline{w}$ forment une base de C^2.

Soit $w = u + iv$ avec $u, v \in R^2$; les vecteurs u et v forment une base de R^2.

Séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'égalité

$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv)$ on obtient

$Au = \alpha u - \beta v$ et $Av = \beta u + \alpha v$. • •

.

Si $\Delta = 0$, on a une racine double et A est diagonalisable si et seulement si A est déja diagonale.

.

1.10. Structure du polynôme caractéristique

.

Théorème. Soit

$$p_A(x) = det(A - xI_n) = (-1)^n x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n$$

1. Les coefficients $c_1, ..., c_n$ sont des polynômes en éléments matriciels a_{ij} de A; c_k est un polynôme homogène de degré k.
2. $c_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}) = (-1)^{n-1} trace(A)$
3. $c_n = \text{dét}(A)$.
4. c_k est invariant par similitude: c_k est le même pour A et $P^{-1}AP$.

.

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs.

1.11. Lemme. Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux: si les blocs diagonaux sont $A_1, ...A_k$, alors

$p_A(x) = p_{A_1}(x)...p_{A_k}(x)$.

Cette propreté utile est la conséquence directe de la propriété suivante du déterminant:

Lemme. Soit A une matrice triangulaire par blocs avec dex blocs diagonaux $A_1, ..., A_k$. Alors $detA = detA_1 \cdot ... \cdot detA_k$.