Réduction des endomorphismes.

.

Diagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K et f un endomorphisme de E. Le but de réduction est de chercher des bases dans E dans lesquelles la forme de la matrice associée à f est la plus simple possible. Si f est déja donné par une matrice $A = M_B(f)$ dans une base B, il s'agit de passer à une autre base B' de façon à ce que la nouvelle matrice $A' = M_{B'}(f) = P^{-1}AP$ soit "simple".

La forme la plus simple d'une matrice est la forme diagonale.

1.1. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** si il admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

.

Vecteurs propres, valeurs propres

.

Si $B = (e_1, ..., e_n)$ alors $M_B(f) = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ signifie que

$f(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, ..., n$.

1.2. Définition: Un **vecteur propre** de f est vecteur **non-nul** v tel que $f(v)$ est colinéaire à v: $f(v) = \lambda v$; le coefficient de proportionalité λ est la **valeur propre** associée. Un scalaire λ est une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$.

La matrice de l'endomorphisme dans une base de vecteurs propres est diagonale, avec les valeurs propres sur la diagonale principale.

Une reformulation de la définition de la diagonalisabilité:

1.1'. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** si il existe une base de vecteurs propres.

L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle **spectre** de f.

Remarque. Si v est un vecteur propre, tout vecteur non-nul colinéaire à v est aussi un vesteur propre (avec la même valeur propre).

1.3. Théorème. *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants.*

• • *Démonstration.* Soit $f(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, ..., n$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Supposons par absurde que la famille $v_1, ..., v_n$ est liée. Soit k tel que les vecteurs $v_1, ..., v_k$ sont linéairement indépendents et $v_1, ..., v_k, v_{k+1}$ sont liés. Donc

$v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$. (*)

On a $f(v_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(v_i)$, donc

$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i$. (**)

On multiplie l'égalité (*) par λ_{k+1}:

$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{k+1} \lambda_i v_i$. (***)

et on soustrait (**) de (***). Cela donne

$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i)v_i$

On note que $\lambda_{k+1} - \lambda_i \neq 0$ et que parmi les coefficients α_i il y a des coefficients non-nuls.

Par conséquent, les vecteurs $v_1, ..., v_k$ sont liés. Cela donne une contradiction à l'hypothèse de départ. • •

.

1.4. Corollaire. Soit $n = \dim(E) < \infty$. Alors

1. f admets au plus n valeurs propres.

2. Si f admet exactement n valeurs propres (deux à deux distinctes), f est diagonalisable.

• • *Démonstration.*

1. Le nombre de vecteurs de E linéairement indépendents ne dépasse pas la dimension de E.

2. Les n vecteurs propres associés sont linéairement indépendents et donc forment une base de E. • •

.

A la recherche des vecteurs propres: polynôme caractéristique.

Soit $\dim(E) < \infty$. On remarque que λ est une valeur propre si et seulement si $f - \lambda Id$ n'est pas injectif: $Ker(f - \lambda I) \neq \{0\}$. En dimension finie cette condition est équivalente à l'annulation du déterminant:

dét $(f - \lambda Id) = 0$. C'est **l'équation caractéristique** pour les valeurs propres.

[Rappel: $det(f - \lambda Id)$ est défini comme $det(M_B(f) - \lambda I_n)$ par rapport à une base B; noter que I_n est la matrice de l'identité Id dans n'importe quelle base.]

.

1.5. Définition. Le déterminant $p_f(x) =$ dét $(f - xId)$ s'appelle **polynôme caractéristique** de f: c'est est un polynôme en x de degré $n = \dim(E)$.

.

On conclut que **les valeurs propres sont précisement les racines du polynôme caractéristique.**

[Parfois on définit le polynôme caractéristique comme

dét$(xId - f) = (-1)^n p_f(x)$.]

Le polynôme caractéristique d'une matrice A est $p_A(x) =$ dét $(A - xI_n)$. Les matrices semblables A et $P^{-1}AP$ ont le même polynôme caractéristique - en fait, cette propriété permet de définir dét $(f - xId)$.

.

Remarque: on a $p_{f+aId}(x) = p_f(x-a)$. Si f est diagonalisable, $f + aId$ l'est aussi ($a \in K$); les valeurs propres de $f + aId$ s'obtiennent en ajoutant a aux valeurs propres de f.

.

Structure du polynôme caractéristique

.

1.6. Soit $p_A(x)$ =dét $(A - xI_n) = (-1)^n x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n$.

1. Les coefficients $c_1, ..., c_n$ sont des polynômes en éléments matriciels a_{ij} de A; c_k est un polynôme homogène de degré k.
2. $c_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}) = (-1)^{n-1} trace(A)$
3. $c_n =$ dét(A).
4. c_k est invariant par similitude: c_k est le même pour A et $P^{-1}AP$.

1.7. Polynôme caractéristique d'une matrice diagonale: si

$A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

Donc une condition nécessaire pour que f soit diagonalisable est que p_f soit scindé (vérifiée automatiquement si $K = \mathbf{C}$). Voici une condition suffisante:

1.8. Corollaire. Si p_f admet n racines distinctes (donc p_f est scindé à racines simples), f est diagonalisable.

• • *Démonstration.* Voir le Corollaire 1.4. • •

.

Remarque: Un polynôme "générique" n'a pas de racines multiples, donc un polynôme "générique" dans $\mathbf{C}$ admet n racines distinctes et un endomorphisme "générique" f est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

.

1.9. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire:

Le déterminant d'une matrice triangulaire et le produit de ses éléments diagonaux, donc pour le polynôme caractéristique on a

$p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - a_{ii})$.

.

Exemples de matrices non-diagonalisables.

Soit A une matrice triangulaire avec $a_{11} = ... = a_{nn} = a$. Si A est diagonalisable, alors A est semblable à aI_n et donc $A = aI_n$. Par conséquent, une matrice triangulaire avec les mêmes éléments sur la diagonale et qui n'est pas elle-même diagonale n'est pas diagonalisable.

.

1.10. Exemple en dimension 2.

Soit $A = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$

Alors $p_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad-bc) = x^2 - tr(A)x + det(A)$.

Les valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}((a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc})$.

Soit $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$ le discriminant.

1. $K = \mathbf{C}$. Si $\Delta \neq 0$, on a deux valeurs propres distinctes et A est diagonalisable. On peut écrire les vecteurs propres comme $v_k = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_k - a \end{pmatrix}$ ou $v_k = \begin{pmatrix} \lambda_k - d \\ c \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$.

2. $K = \mathbf{R}$. Si $\Delta > 0$, on a deux valeurs propres **réelles** distinctes et A est diagonalisable (sur R).

Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racines réelles et A n'est diagonalisable sur R. On peut réduire A par similitude à la forme $A' = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ -\beta, \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha = (a+d)/2$ et $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$.

• • En effet, soit $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ les valeurs propres de A et w et $\overline{w}$ des vecteurs propres associés: $Av = \lambda w$ et $A\overline{w} = \overline{\lambda}\overline{w}$.

Les vecteurs w et $\overline{w}$ forment une base de C^2.

Soit $w = u + iv$ avec $u, v \in R^2$; les vecteurs u et v forment une base de R^2.

Séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'égalité

$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv)$ on obtient

$Au = \alpha u - \beta v$ et $Av = \beta u + \alpha v$. • •

.

Si $\Delta = 0$, on a une racine double et A est diagonalisable si et seulement si A est déja diagonale.

.

Diagonalisation dans R^n.

Soit $A \in Mat_n(R)$.

Supposons que le polynôme caractéristique $p_A(x)$ n'a pas de racines multiples dans C.

Soit donc $\mu_1, ..., \mu_k$ les racines réelles et $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, ..., \lambda_s, \overline{\lambda_s}$ les racines non-réelles de $p_A(x)$. On a $k + 2s = n$.

Pour chaque valeur propre μ_i soit $z_i \in R^n$ un vecteur propre associé; pour chaque valeur propre λ_j soit $u_j, v_j \in R^n$ le couple de vecteurs construit avant.

Les vecteurs z_i, u_j, v_j, $i = 1, ..., k$, $j = 1, ..., s$ forment une base de R^n et la matrice A agit dans cette base de façon "diagonale par 2×2 - blocs": $Az_i = \mu_i z_i$, $Au_j = \alpha_j u_j - \beta_j v_j$, $Av_j = \beta_j u_j + \alpha_j v_j$.

.

1.10. Projecteurs.

Soit $E = F \oplus G$: chaque vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique $v = v_1 + v_2$, où $v_1 \in F$ et $v_2 \in G$.

Le **projecteur** P_F sur F parallèlement à G est défini par $P_F(v) = v_1$. Autrement dit, $P_F(v) = v$ si $v \in F$ et $P_F(v) = 0$ si $v \in G$, donc $Im(P_F) = F$ et $Ker(P_F) = G$. Evidemment, $P_F^2 = P_F$.

Les vecteurs non-nuls dans le sous-espace F sont les vecteurs propres de valeur propre 1; les vecteurs non-nuls dans le sous-espace G sont les vecteurs propres de valeur propre 0.

En choisissant des bases de F et G on diagonalise P_F.

Le polynôme caractéristique de P_F est $(-1)^n x^{n-k}(x-1)^k$, où

$k =$dim (F).

Par symétrie, le projecteur P_G sur G parallelement à F est défini par $P_G(v) = v_2$, ou encore $P_G = Id - P_F$.

Lemme. L'endomorphisme f est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$.

• • *Démonstration.* Soit $f^2 = f$, $F = Im(f)$ et $G = Ker(f)$. Pour $v \in E$ soit $v_1 = f(v)$ et $v_2 = v - f(v)$. On a $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in F$ et $f(v_2) = f(v) - f(f(v)) = 0$, donc $v_2 \in G$.

Si $v \in F \cap G$, alors $v = f(u)$ et $0 = f(v) = f(f(u)) = f(u) = v$, donc $F \cap G = 0$ et $E = F \oplus G$. Donc f est le projecteur sur F parallèlement à G. • •

.

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.

Si A est triangulaire, on a $p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (x - a_{ii})$.

Cas particulier: matrice triangulaire avec $a_{11} = ... = a_{nn} = a$. Si A est diagonalisable, alors A est semblable à aI_n et donc $A = aI_n$. Par conséquent, une matrice triangulaire avec les mêmes éléments sur la diagonale et n'est pas diagonalisable sauf si elle est déjà diagonale.

.

1.11. Lemme. Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux: si les blocs diagonaux sont $A_1, ...A_k$, alors

$p_A(x) = p_{A_1}(x)...p_{A_k}(x)$.

Cette propreté utile est la conséquence directe du lemme suivant:

Lemme. Soit A une matrice triangulaire par blocs avec deux blocs diagonaux A' et A''. Alors $detA = detA' \cdot detA''$.

• • *Démonstration.* On procède par récurrence sur la dimension de la matrice.

Soit A triangulaire supérieure. Pour calculer det A on développe suivant la première colonne $det(A) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} a_{i1} detA_{i1}$ (ici k est la taille du premier bloc diagonal).

Chaque matrice A_{i1} est aussi triangulaire par blocs, la première bloc étant A'_{i1} et le deuxième A''. En appliquant l'hypothèse de récurrence on a $det A_{i1} = det A'_{i1} det A''$, donc

$det(A) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} a_{i1} det A_{i1} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} a_{i1} det A'_{i1} \cdot det A'' =$
$det A' det A''$.

• •

1.12. Trigonalisation

Il est parfois utile (par exemple si un endomorphisme n'est pas diagonalisable) de chercher une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

.

Lemme. Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

• • *Démonstration.* La permutation des éléments de la base canonique $p(e_i) = e_{n-i+1}$ convertit les matrices triangulaires supérieures en matrices triangulaires inférieures. • •

On a vu que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$ et son polynôme caractéristique est

$p_A(x) = (-1)^n \Pi_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$.

.

Définition. Un endomorphisme est **trigonalisable** si il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire (supérieure ou inférieure).

Théorème. Un endomorphisme est trigonalisable dans K si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans K.

Plus précisement:

- $K = \mathbf{C}$: tout endomorphisme est trigonalisable dans $\mathbf{C}$.

- $K = \mathbf{R}$: un endomorphisme est trigonalisable dans $\mathbf{R}$ si et seulement si toutes les racines complexes de son polynôme caractéristique sont réelles.

.

• • *Démonstration.* On procède par récurrence sur la dimension de E. Supposons le théorème vrai pour la dimension inférieure à n. Soit dim $E = n$.

Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre, $f(v) = \lambda v$. Prenons $v_1 = v$ et complétons v_1 en une base $(v_1, ..., v_n)$ de E. La matrice A de f dans cette base est triangulaire supérieure par blocs: le premier bloc diagonal est λ et le deuxième bloc (de dimension $n-1$) sera noté B. On a $p_f(x) = (\lambda - x) p_B(x)$, donc $p_B(x)$ est aussi scindé dans K. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la matrice B; il exsite une matrice de passage P telle que $P^{-1}BP$ soit triangulaire supérieure. Soit $\tilde{P}$ la matrice diagonale par bloc avec le premier bloc de taille 1 egal à 1 et le deuxième bloc de taille $n-1$ égal à P. Alors $\tilde{P}^{-1}A\tilde{P}$ est triangulaire supérieure.

• •