1. Formes hermitiennes.

.

La théorie des formes et espaces hermitiens est parallèle à celle des formes bilinéaires symétriques et des epaces euclidiens.

1.1. Définition. Soit E un espace vectoriel sur C.

Une **forme hermitienne** sur E est une application $h : E \times E \to C$, vérifiant:

1. h est linéaire à droite: $h(x, \alpha y + \beta z) = \alpha h(x,y) + \beta h(x,z)$,
2. h est semi-linéaire à gauche: $h(\alpha x + \beta y, z) = \overline{\alpha} h(x,z) + \overline{\beta} h(y,z)$.
3. Symétrie hermitienne: $h(y,x) = \overline{h(x,y)}$ pour tous $x, y \in E$.

(Noter que 2. est la conséquence de 1. et 3.)

.

Pour une forme hermitienne h on définit la **forme quadratique associée** $q_h : E \to R$: $q_h(x) = h(x,x)$. Noter que q_h est à valeurs **réelles**.

La forme hermitienne est déterminée par la forme quadratique associée:

$$h(x,y) = \frac{1}{4}[q_h(x+y) - q_h(x-y) + iq_h(x-iy) - iq_h(x+iy)]$$

(*"identité de polarisation"*).

.

L'ensemble de toutes les formes hermitiennes est un espace vectoriel sur R: si $h_1, ..., h_k$ sont des formes hermitiennes et $a_1, ...a_k$ des scalaires réels, $a_1\varphi_1 + ... + a_k\varphi_k$ est une forme hermitienne.

.

Exemples. 1. Si f et g sont deux formes C-linéaires, $\varphi(x,y) = \overline{f(x)}g(y) + \overline{g(x)}f(y)$ est une forme hermitienne.

2. Soit E l'espace des matrices $k \times n$ sur C; alors $h(A,B) = tr({}^t\bar{A}B)$ est une forme hermitienne.

3. Soit $E = C([a,b], C)$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$. Alors $\varphi(f,g) = \int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt$ est une forme hermitienne.

.

1.2. Expression en coordonnées. On suppose que dim $E = n < \infty$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $x = \sum_1^n x_i e_i$, $y = \sum_1^n y_i e_i$.

Alors $h(x,y) = \sum_{i,j=1}^n \overline{x_i} y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{x_i} y_j$ où $a_{ij} = h(e_i, e_j)$.

La matrice $A = (a_{ij}) = (h(e_i, e_j))$ est la *matrice de la forme hermitienne* h dans la base $\mathcal{B}$.

Cette matrice est **hermitienne**: $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, ou $\overline{{}^tA} = A$. La forme quadratique associée s'écrit: $q_h(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \overline{x_i} x_j$.

Soit X la colonne des composantes du vecteur x: ${}^tX = (x_1, ..., x_n)$. Alors on peut écrire h à l'aide de la multiplication matricielle:

$$h(x,y) = \overline{{}^tX}AY$$

.

1.3. Changement de base (changement linéaire de coordonnées).

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une autre base de E, soit X' et Y' les colonnes des coordonnées des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}'$.

On a $X = PX'$ et $Y = PY'$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $h(x,y) = \overline{{}^tX}AY = \overline{{}^tX'{}^tP}APY' = \overline{{}^tX'}A'Y'$ où

$$A' = \overline{{}^tP}AP$$

est la matrice de la forme h dans la base $\mathcal{B}'$.

.

1.4. Equivalence des formes. Deux formes hermitiennes h et h' définies dans E et E' sont dites **équivalentes** si il existe un isomorphisme $f : E \to E'$ tel que $h(x,y) = h'(f(x), f(y))$.

Si $\dim(E) < \infty$, les formes h et h' sont équivalentes si leurs matrices A et B sont liées par $B = \overline{{}^tP}AP$ avec P inversible (autrement dit, si on peut trouver deux bases dans lequelles h et h' ont la même matrice).

.

1.5. On appelle **rang** d'une forme hermitienne le rang de sa matrice (il ne dépend pas du choix de la base). On dit que la forme est **non-dégénérée** si son rang est égal à la dimension de E.

Le **noyau** de h est défini par

Ker $h = \{x \in E : \forall y \in E, h(x,y) = 0\}$.

On a: rang (h) + dim (Ker h) = dim (E).

.

1.6. Soit h une forme hermitienne. Les vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $h(x,y) = 0$. Une base est dite **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Dans une base orthogonale la forme s'écrit $h(x,y) = \sum_1^n a_i \overline{x_i} y_i$, avec $a_i \in R$ et la matrice de h est diagonale. La forme quadratique associée devient alors une combinaison linéaire de carrés: $q(x) = \sum_1^n a_i \mid x_i \mid^2$.

Le rang de h (ou de q) est le nombre de coefficients a_i non-nuls. Le noyau de h est engendré par les vecteurs de base e_i pour lesquels $a_i = 0$ (a_i réels).

.

1.7. Orthogonalisation de Gauss (réduction en carrés).

L'orthogonalisation de Gauss permet de fabriquer une base orthogonale pour la forme quadratique hermitienne $q_h(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\overline{x_i}x_j$ par des changements de coordonnées successives.

La méthode est la même que pour les formes bilinéaires symétriques.

Résultat: toute forme hermitienne admet une base orthogonale.

.

1.8. Classification des formes hermitiennes. Signature

Soit q une forme quadratique hermitienne. Dans une base orthogonale, si on regroupe les coefficients positifs et négatifs, q s'écrit:

$q(x) = \sum_{i=1}^r a_i x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} a_i x_i^2$ avec $a_i > 0$, $i = 1, ..., k$ et $r + s$ est le rang de q.

.

Théorème (loi d'inertie de Sylvester. Les entiers r et s (le nombre de carrés positif et négatifs) sont indépendants du choix de la base $q-$orthogonale.

.

Le couple (r, s) s'appelle **signature** de la forme hermitienne.

.

Corollaire. Deux formes hermitiennes sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.

.

1.9. La forme quadratique hermitienne q est dite **positive** si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ (donc, si $s = 0$); elle est dite **définie positive** si $q(x) > 0$ pour tout x non-nul (donc, si $r = dim(E)$).

.

En termes matriciels, A est positive si $\overline{{}^tX}AX \geq 0$ pour tout X; A est définie positive si $\overline{{}^tX}AX > 0$ pour tout $X \neq 0$.

Remarque: pour toute matrice C la matrice $A = \overline{{}^tC}C$ est positive; $\overline{{}^tC}C$ est définie positive si et seulement si C est inversible.

.

1.10. Orthogonalisation de Gauss pour les formes définie positives.

Si $q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\overline{x_i}x_j$ est définie positive, on a $a_{ii} > 0$ pour tout i. Donc dans l'algorithme de Gauss la matrice de changement de variables est à chaque étape triangulaire (supérieure); la matrice de passage P vers la base orthonormale dans laquelle q est la somme des carrés est donc triangulaire supérieure et $\overline{{}^tP}AP = I_n$. Soit $C = P^{-1}$. On a $A = \overline{{}^tC}C$.

Théorème de factorisation triangulaire (Gauss-Cholesky).

Pour toute matrice A hermitienne définie positive il existe une unique matrice C triangulaire supérieure à diagonale positive telle que $A = \overline{{}^tC}C$.

.

2. Espaces Hermitiens.

2.1. Soit E un C-espace vectoriel. Un **produit scalaire** sur E est une forme hermitienne définie positive, noté $< .,. >$.

La **norme** associée est définie par $\| x \|^2 = < x, x >$.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz $|< x, y >| \leq \| x \| \| y \|$ entraine l'inégalité du triangle $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

La distance d dans E est définie par $d(x, y) = \| x - y \|$.

Le produit scalaire est déterminé par la norme associée ("identité de polarisation").

Un C-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire s'appelle **espace hermitien**.

Exemples: 1. Produit scalaire canonique dans C^n: $< x, y >= \sum_1^n \overline{x_i} y_i$; la norme est donnée par le "théorème de Pythagore": $\| x \|^2 = \sum_1^n | x_i |^2$.

2. $E = C([a, b], C)$, $< f, g >= \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$.

.

2.2. Deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $< x, y >= 0$.

Sous-espace orthogonale. Soit $A \subset E$; **l'orthogonal** de A est l'ensemble de vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A:

$A^\perp = \{x \in E : \forall y \in A \text{ on a } < x, y >= 0\}$.

Il est claire que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Deux sous-espaces E_1 et E_2 sont **orthogonaux** si tout vecteur de E_1 est orthogonal à tout vecteur de E_2. Ceci est équivalent à dire que $E_2 \subset E_1^\perp$ ou que $E_1 \subset E_2^\perp$. Il est évident dans ce cas que $E_1 \bigcap E_2 = \{0\}$.

.

Famille orthogonale. Une famille de vecteurs de E est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs de E est dite **orthonormale** si elle est orthogonales et tous ses vecteurs sont de norme 1.

Lemme. Une famille orthogonale sans vecteurs nuls est libre.

D'une famille orthogonale $(e_1, ..., e_n, ...)$ on peut facilement passer à une famille orthonormale en normalisant les vecteurs e_i: $e'_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$.

.

Exemple. 1. Dans l'espace des fonctions continues $C([0, 2\pi], C)$ avec le produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$ la famille $(e^{int})_{n \in Z}$ est orthonormale.

.

2.3. Coordonnées dans une base orthonormale.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base **orthonormale** , soit $x = \sum_1^n x_i e_i$, $y = \sum_1^n y_i e_i$. Alors $< x, y >= \sum_1^n \overline{x_i} y_i$, $\| x \|^2 = \sum_1^n | x_i |^2$ ("théorème de Pythagore") et

$x_i = < e_i, x >$.

Coordonnées dans une base **orthogonale:** $< x, y > = \sum_1^n < e_i, e_i > \overline{x_i} y_i$ $\| x \|^2 = \sum_1^n < e_i, e_i > | x_i |^2$ et $x_i = \frac{< e_i, x >}{< e_i, e_i >}$.

.

2.4. Orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Soit $(v_1, ..., v_n, ...)$ une famille libre dans E. On peut construire une famille orthonormale $e_1, ..., e_n, ...$ telle que $Vect(v_1, ..., v_k) = Vect(e_1, ..., e_k)$ pour tout $k \geq 1$. (Autrement dit, e_k est une combinaison linéaire de $v_1, ..., v_k$.)

.

La construction est la même que pour un produit scalaire euclidien.

.

Corollaire. Tout espace hermitien admet une base orthonormale. Toute famille orthonormale dans un espace hermitien peut être complétée en une base orthonormale.

.

2.5. Projection orthogonale.

Soit E un espace muni du produit scalaire et $F \subset E$ un sous-espace.

Motivation. On sait que $F \bigcap F^\perp = \{0\}$. Supposons que $F^\perp$ est un supplémentaire de F, donc $E = F \bigoplus F^\perp$, somme directe orthogonale. (Ceci est toujours vrai en dimension finie.)

Le projecteur othogonal sur F, noté P_F, est par définition le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. Si $x \in E$ on décompose $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$; alors, par définition, $P_F(x) = x_1$, la composante "orthogonale" de x dans F.

Noter que le projecteur orthogonal sur $F^\perp$ est $P_{F^\perp} = Id - P_F$.

.

Définition. Soit $F \subset E$ un sous-espace de dimension finie.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base **orthonormale** de F.

On définit $P_F : E \to E$ par $P_F(x) = \sum_1^n < e_i, x > e_i$. Alors on a

Lemme. P_F est un projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Corollaire. Si F est un sous-espace de dimension finie, $F^\perp$ est un supplémentaire de F: $E = F \bigoplus F^\perp$, somme directe orthogonale. On a aussi $(F^\perp)^\perp = F$.

.

Projection orthogonale dans une base quelconque.

Le vecteur $y = P_F(x)$ est caractérisé par les conditions

$y \in F$ et $< z, y > = < z, x >$ pour tout vecteur z de F.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de F. La dernière condition est donc équivalente à $< e_j, y > = < e_j, x >$, $j = 1, ..., n$.

Posons $P_F(x) = \sum_1^n y_i e_i$. pour déterminer les coefficients y_i on doit résoudre le système:

$\sum_{j=1}^n y_j < e_i, e_j >=< e_i, x >$, $j = 1, ..., n$.

La matrice de ce système $G = (< e_i, e_j >)$ s'appelle *matrice de Gram.* Soit $(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)$ une base orthonormale et $e_j = \sum_i a_{ij} \tilde{e}_i$, donc

$a_{ij} = (< e_i, \tilde{e}_j >)$. Soit $A = (a_{ij})$, alors $G = {}^t\overline{A}A$. En particulier, G est définie positive et dét G=|dét A $|^2$.

.

2.6. Projection othogonale et meilleure approximation en moyenne quadratique. Distance à un sous-espace.

Lemme. Soit F est un sous-espace de dimension finie et $x \in E$. Alors la projection $P_F(x)$ réalise la distance minimale entre x et les vecteurs de F: $\| x - P_F(x) \| = \min \{\| x - z \|, z \in F\}$.

.

Exemple. Meilleure approximation en moyenne quadratique par des polynômes trigonométriques.

Un polynôme trigonométrique de dégré $\leq n$ est la somme $p(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$. Soit $f \in C([0, 2\pi])$ une fonction continue. On cherche on polynôme trigonométrique p de degré $\leq n$ tel que l'écart $\int_0^{2\pi} (f(t) - p(t))^2 dt$ soit minimal.

La réponse est donnée par la projection orthogonal dans $C([0, 2\pi])$ sur le sous-espace des polynômes trigonométriques de dégré $\leq n$; le produit scalaire est $< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. On a la famille orthogonale: $(e^{int})_{n \in Z}$. On en déduit les coefficients du polynôme $p(t)$ de meilleure approximation: $a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)dt$.

.

2.7. Inégalité de Bessel et égalité de Bessel-Parseval.

Soit E un espace hermitien, soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthonormale.

Soit $x \in E$ et $x_i =< e_i, x >$. Il est claire que $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \| x \|^2$.

.

Lemme. Soit $x \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $\sum_{i=1}^n | x_i |^2 = \| x \|^2$.

(ii) $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

(iii) x appartient à l'espace vectoriel engendré par $(e_1, ..., e_n)$ (donc x est une cobinaison linéaire des vecteurs $e_1, ..., e_n$).

.

Soit maintenant $\dim(E) = \infty$.

Théorème. Soit $(e_1, ..., e_n, ...)$ une famille orthonormale infinie, $x \in E$ et $x_i =< e_i, x >$.

A. Pour tout n on a $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \| x \|^2$

et la série $\sum_{i=1}^\infty x_i^2$ converge.

B. Les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) $\sum_{i=1}^{\infty} \mid x_i \mid^2 = \parallel x \parallel^2$.
(ii) $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
(iii) x appartient à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par la suite $(e_1, ..., e_n, ...)$.

.

Egalité de Bessel-Parseval dans une "base" orthogonale.

Si $(e_1, ..., e_n, ...)$ est une famille orthogonale et x appartient à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par la suite $(e_1, ..., e_n, ...)$, alors
$\parallel x \parallel^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<e_i,x>^2}{<e_i,e_i>}$.

.

3. Formes hermitiennes et endomorphismes.

3.1. Proposition. Soit E un espace hermitien et f un endomorphisme de E. Il existe l'unique endomorphisme f^* tel que
$< x, f(y) >=< f^*(x), y >$.

Définition. L'endomorphisme f^* tel que $< x, f(y) >=< f^*(x), y >$ s'appelle **l'adjoint** de f.

La matrice de f^* dans une base orthonormale est la transposée hermitienne de la matrice de f: $M_{f^*} = \overline{{}^tM_f}$.

Définition. L'endomorphisme f est dit **auto-adjoint** ou **hermitien** si $f^* = f$. L'endomorphisme f est hermitien si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est hermitienne.

.

Exemple. Une projection orthogonale est auto-adjoint.

.

3.2. *Propriétés de l'adjoint.* L'application $f \to f^*$ est linéaire; $(f^*)^* = f$, $(fg)^* = g^*f^*$ et $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

Lemme. (1) L'orthogonal d'un sous-espace stable par f est stable par f^*.
(2) Ker f^* = (Im $f)^\perp$ et Im f^* =(Ker $f)^\perp$.

.

Corollaire. Si f est auto-adjoint, alors Ker f = (Im $f)^\perp$ et E est la somme orthogonale de Ker f et Im f. L'orthogonal d'un sous-espace stable par f est stable par f.

.

3.3. Diagonalisation des matrices hermitiennes.

Proposition. Soit f un endomorphisme auto-adjoint. Alors
(i) Toutes les valeurs propres de f sont réelles.
(ii) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

(iii) f est diagonalisable dans une base orthonormale.

.

3.4. Un endomorphisme hermitien f est dit **positif** (respectivement, **défini positif**) si la forme associée $h(x, y) =< x, f(y) >$ est positive (respectivement, défini positive).

La proposition précédente montre qu'un endomorphisme hermitien est positif (respectivement, défini positive) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement, stictement positives).

Une matrice hermitienne A est dit **positive** (respectivement, **défini positive**) si $\overline{{}^tX}AX \geq 0$ pour tout $X \in R^n$ (respectivement, $\overline{{}^tX}AX > 0$ pour tout X non-nul).

.

Exemple: racine carré d'une matrice positive. Soit f un endomorphisme positif, Π_i le projecteur spectral associé à la valeur propre λ_i, $i = 1, ..., k$. On a $f = \sum \lambda_i \Pi_i$. Posons $g = \sum \sqrt{\lambda_i}\Pi_i$. Alors g est hermitien positif et $g^2 = f$. On montre facilement qu'une telle racine carré positive $\sqrt{f} = g$ est unique.

.

3.5. Diagonalisation d'une forme hermitienne dans une base orthonormale.

Soit q une forme quadratique hermitienne et soit f un endomorphisme auto-adjoint tel que $q(x) =< x, f(x) >$. On a vu que dans une base orthonormale q et f ont la même matrice. Donc dans une base orthonormale de vecteurs propres de f la matrice de q est diagonale et q est une combinaison linéaire de carrés.

Proposition. *"Réduction aux axes principaux".* Pour toute forme quadratique hermitienne q il existe une une base orthonormale dans laquelle la matrice de q est diagonale et q est une combinaison linéaire de carrés: $q(x) = \sum_1^n a_i x_i^2$. Les coefficients a_i sont les valeurs propres de l'endomorphisme auto-adjoint f associé ($q(x) =< x, f(x) >$).

On peut reformuler ce résultat comme la *diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques:* la forme q et le produit scalaire $< x, x >$.

.

4. Transformations unitaires.

4.1. Soit E un espace hermitien.

Un endomorphisme U de E est **unitaire** (est une isométrie linéaire) si U préserve le produit scalaire: $< Ux, Uy >=< x, y >$ pour tout $x, y \in E$.

.

Proposition. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) U est unitaire.

(ii) U préserve la norme: $\| Ux \| = \| x \|$ pour tout $x \in E$.
(iii) U transforme toute base orthonormale en base orthonormale.
(iv) U transforme une base orthonormale en base orthonormale.
Un endomorphisme unitaire est injectif, donc inversible
(dim $E < \infty$!). Son inverse est aussi unitaire.
.

4.2. L'égalité $< Ux, Uy > = < x, y >$ s'écrit aussi
$< U^*Ux, y > = < x, y >$ ce qui est équivalent à $U^*U = I_n$. Donc U est orthogonal si et seulement si $U^*U = I_n$, ou encore ssi $U^{-1} = U^*$.

Une **matrice unitaire** est la matrice d'un endomorphisme unitaire dans une base orthonormale. Une matrice unitaire U est caractérisée par la relation $\overline{{}^tU}U = U\overline{{}^tU} = I_n$ qui signifie que les colonnes de A (aussi que ses lignes) constituent une base orthonormale par rapport au produit scalaire canonique dans C^n.
.

4.3. *Transformations unitaires et diagonalisation d'une forme hermitienne dans une base orthonormale.*

Soit A la matrice d'une forme quadratique hermitienne q dans une base $\mathcal{B}$; soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une autre base $\mathcal{B}'$. Alors la matrice de la forme q dans la base $\mathcal{B}'$ est $A' = \overline{{}^tP}AP$. Si les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormales, P est unitaire: $\overline{{}^tP} = P^{-1}$ et on a $A' = \overline{{}^tP}AP = P^{-1}AP$. Donc la matrice d'une forme se transforme comme la matrice d'un endomorphisme si le changement de coordonnées est unitaire. Cela montre encore une fois que la diagonalisation d'une forme quadratique par une transformation unitaire demande la recherche des valeurs et des vecteurs propres de A.
.
.

4.4. Réduction des endomorphismes unitaires.
Proposition. Soit U un endomorphisme unitaire.
(i) Si le sous-espace F est stable par U, alors $F^\perp$ est stable par U.
(ii) Toute valeur propre de U est de module 1.
(iii) U est diagonalisable dans une base orthonormale.
Transformations unitaires en petite dimension.
Dimension 1. $Ux = \alpha x$ où $| \alpha | = 1$.
Dimension 2.
Toute matrice unitaire peut s'écrire sous la forme suivante:
$U = \alpha \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ où $| \alpha | = 1$ et $| a |^2 + | b |^2 = 1$.
.

4.5. Décompositon polaire.

Théorème. Soit $A \in Mat_n(C)$ une matrice inversible. Il existe l'unique matrice unitaire U et l'unique matrice hermitienne définie positive S telles que $A = US$.

.

4.6. Décomposition unitaire-triangulaire.

Théorème. Soit $A \in Mat_n(C)$ une matrice inversible. Il existe l'unique matrice unitaire U et l'unique matrice triangulaire supérieure T avec une diagonale positive telles que $A = UT$.

.

La décomposition unitaire-triangulaire est liée à l'orthogonalisation de Gram-Schmidt.