Déterminants 2.

8. Proposition. Soit $A = (a_{ij})$. On a

$$detA = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$$

Déterminant de la transposée d'une matrice.

La Proposition 8 permet de démontrer facilement le résultat suivant:

9. Théorème. Pour toute matrice $A \in Mat_n(K)$ on a

$$det(^tA) = detA$$

• • *Démonstration.* On a

dét$A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$ et dét$(^tA) = \sum_{\rho \in S_n} \varepsilon(\rho) a_{1,\rho(1)} ... a_{n,\rho(n)}$.

Si $\rho = \sigma^{-1}$, on a $\varepsilon(\rho) = \varepsilon(\sigma)$ et le produit $a_{1,\rho(1)} ... a_{n,\rho(n)}$ contient les mêmes termes que le produit $a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$. En effet, le terme a_{ij} est présent dans le produit $a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$ ssi $i = \sigma(j)$; le même terme a_{ij} est présent dans le produit $a_{1,\rho(1)} ... a_{n,\rho(n)}$ ssi $j = \rho(i) = \sigma^{-1}(i)$, donc ssi $i = \sigma(j)$. • •

.

10. Corollaire. Toutes les propriétés du déterminant relatives aux colonnes peuvent être affirmées pour les lignes.

.

Formes linéaires alternées et déterminant.

Définition. Soit E un espace vectoriel sur K. Une **forme n-linéaire alternée** est une application $f : E \times ... \times E \to K$ (donc une fonction de n variables vectories à valeurs dans K) telle que

(1) f est linéaire par rapport à chaque variable vectorielle;

(2) si on échange entre elles deux variables vectorielles, f change de signe.

En particulier, si parmi les vecteurs $f(v_1, ..., v_n)$ il y a deux égaux, $f(v_1, ..., v_n) = 0$.

Le déterminant considéré comme une fonction de n colonnes de la matrice est une forme $n-$linéaire alternée.

Comme avant, on montre que pour une permutation σ on a

$f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, ... v_n)$.

.

11. Théorème. Soit dim $E = n$. Soit $f : E \times ... \times E \to K$ une forme $n-$linéaire alternée. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, $v_1, ... v_n \in E$ et $v_j = \sum_i v_{ij} e_i$, $j = 1, ..., n$. Alors

$$f(v_1, ..., v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1),1} ... v_{\sigma(n),n} f(e_1, ..., e_n)$$

Autrement dit, $f(v_1, ..., v_n) = c \cdot detV$,

où $V = (v_{ij})$ est la matrice des coefficients v_{ij} et $c = f(e_1, ..., e_n)$.

• • *Démonstration.*

$f(v_1, ..., v_n) = f(\sum_{i_1} v_{i_1 1} e_{i_1}, ..., \sum_{i_n} v_{i_n n} e_{i_n}) =$
$\sum_{i_1,...,i_n} v_{i_1 1} ... v_{i_n n} f(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1),1} ... v_{\sigma(n),n} f(e_1, ..., e_n)$

• •

.

12. Corollaire: caractérisation du déterminant. Le déterminant est l'unique forme n- linéaire alternée normalisée: dét $(I_n) = 1$. Toute forme n- linéaire alternée est proportionnelle au déterminant.

Noter que le déterminant est un polynôme homogène de degré n en n^2 variables (a_{ij}) qui contient $n!$ monômes.

Vu que $n!$ croît très vite avec n, cette formule n'est pas très pratique pour les calculs.

.

Déterminant du produit des matrices.

13. Théorème. Pour toutes deux matrices $A, B \in Mat_n(K)$ on a

$$det(AB) = (detA)(detB)$$

• • *Démonstration.* Considérons l'application $f : K^n \times ... \times K^n \to K$ définie par $f(v_1, ..., v_n) =$ dét$(Av_1, ..., Av_n)$ Ici $v_i \in K^n, i = 1, ..., n$; donc v_j est la colonne $v_j = (v_{1j}, ..., v_{nj})^t$.

Soit $V = (v_1, ...v_n) = (v_{ij})$ la matrice avec les colonnes $(v_1, ...v_n)$.

On vérifie aisément que f est n-linéaire et alternée par rapport aux vecteurs $v_1, ...v_n$. Donc (Théorème 11), f est proportionnelle à détV:

$f(v_1, ..., v_n) = det(Av_1, ..., Av_n) = c \cdot detV$,

où $c = f(e_1, ..., e_n) = det(Ae_1, ..., Ae_n) = detA$.

Mais comme matrice, $(Av_1, ..., Av_n) = AV$ et la formule précédente devient $det(AV) = (detA)(detV)$. Il suffit maintenant de prendre $V = B$.

• •

14. Corollaire. Si $A \in Mat_n(K)$ est inversible on a
dét $(A^{-1}) = ($dét$A)^{-1}$.

15. Corollaire. Si A et A' sont deux matrices semblables, $A' = P^{-1}AP$, alors détA' =détA.

En particulier, le déterminant de la matrice associée à un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base.

.

Déterminant d'un endomorphisme.

Définition. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E. On appelle **déterminant** de f le déterminant de la matrice qui représente f dans une base quelconque de E.

On note les propriétés suivantes:

1. $\det f \neq 0$ si et seulement si f est inversible.

2. Si f et g sont des endomorphismes de E, on a $\det(f \circ g) = (\det f)\det(g)$.

.

Développement suivant une ligne ou une colonne; cofacteurs.

Soit A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Compte tenu du fait que l'on peut échanger entre elles les les lignes ou les colonnes (le déterminant change de signe) et de la dualité entre les colonnes et les lignes, à partir du développement selon la première ligne on a les formules suivantes:

16. Théorème. 1. Le développement du déterminant suivant la i-ème ligne:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det A_{ij}$$

2. Le développement du déterminant suivant la j-ème colonne:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det A_{ij}$$

17. Définition. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \text{dét} A_{ij}$.

On a donc les développements:

.

$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$ et $det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$.

.

Une définition équivalente des cofacteurs est souvant utile:

$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \text{dét} A_{ij} = det(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, Cj+1, ..., C_n)$, où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique de K^n et $C_1, ..., C_n$ sont les colonnes dela matrice A.

.

Matrice inverse.

19. Théorème. Soit $\Delta = (\Delta_{ij})$ la **comatrice** de A - la matrice constituée de cofacteurs de A. Alors $A({}^t\Delta) = {}^t\Delta A = (\text{dét} A)I$.

En particulier, si A est inversible ($\text{dét} A \neq 0$), on a

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} {}^t\Delta$$

.

• • *Démonstration.* La formule $\Delta_{ij} = det(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, Cj + 1, ..., C_n)$ montre immédiatement que $\sum_{i=1}^n a_{ik}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ik}det(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, Cj + 1, ..., C_n) = det(C_1, ..., C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{ik}e_i, Cj + 1, ..., C_n) = det(C_1, ..., C_{j-1}, C_k, Cj + 1, ..., C_n)$, ce qui est égal à 0 si $k \neq j$ et à détA si $k = j$

Donc ${}^t\Delta A =$(dét$A)I$. • •

Systèmes d'équations linéaires.

Nous allons considérer un **système linéaire** de n équations à n inconnues à coefficients dans K:

.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{pmatrix}$$

.

En termes des matrices le système (S) s'écrit $AX = B$ en notant $A = \begin{pmatrix} a_{11}.......a_{1n} \\ .... \\ a_{n1}.......a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$.

Résoudre (S) c'est trouver tous les vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant (S).

.

20. Lemme. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) La matrice A est inversible.

(2) L'équation $AX = B$ admet au plus une solution.

(3) Pour tout B l'équation $AX = B$ admet au moins une solution.

• • *Démonstration.* Avec la matrice A on associe l'endomorphisme $u : K^n \to K^n$ défini par $u(X) = AX$.

La propriété (1) dit que u est inversible, la propriété (2) dit que u est injectif, et la propriété (3) dit que u est surjectif. On a vu que pour un endomorphisme ces propriétés sont équivalentes (conséquence de la formule du rang). • •

.

Si la matrice A est inversible (det$(A) \neq 0$), le système est dit de **Cramer**: il possède une solution unique donnée par $X = A^{-1}B$.

(En pratique on utilise la méthode du pivot de Gauss; la résolution du système fournit aussi la matrice inverse A^{-1}.)

21. Formules de Cramer. Soit $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A. Un système de Cramer $AX = B$ admet toujours une solution unique quel que soit le vecteur B; la solution est donnée par les formules de Cramer

$$x_j = \frac{det(C_1, ..., C_{j-1}, B, C_{j+1}, ...C_n)}{detA}$$

• • *Démonstration.* L'équation $AX = B$ s'écrit $\sum_i x_i C_i = B$, d'où
$det(C_1, ..., C_{j-1}, B, C_{j+1}, ..., C_n) =$
$det(C_1, ..., C_{j-1}, \sum_i x_i C_i, C_{j+1}, ..., C_n) =$
$\sum_i x_i det(C_1, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n) = x_j det(C_1, ..., C_n)$. • •

Remarque. La formule de Cramer n'est rien d'autre que la formule pour les éléments de la matrice inverse: $(A^{-1})_{ji} = \frac{1}{detA}\Delta_{ij}$ En effet, l'élément $(A^{-1})_{ji}$ est la j-ème composante du vecteur $A^{-1}e_i$, donc égal à
$\frac{det(C_1,...,C_{j-1},e_i,C_{j+1},...C_n)}{detA} = \frac{1}{detA}\Delta_{ij}$.

.

Dans le cas général, L'équation $AX = B$ admet une solution si et seulement si le vecteur B est une combinaison linéaire des colonnes $(C_1, ..., C_n)$; si c'est le cas, à toute solution on peut ajouter une solution de l'équation homogène $AX = 0$, donc un vecteur de $\ker(A)$. L'ensemble des solutions est donc un espace (affine) de dimension $\dim(\ker A) = n-$ rang(A).

.

22. Calcul du déterminant.

Une méthode simple consiste à tuer tous les éléments sauf un dans une ligne (ou une colonne) par des opérations élémentaires sur les colonnes (ou les lignes) qui ne changent pas le déterminant.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. Soit A_{1j} la matrice (d'ordre $n-1$) obtenue en supprimant la première ligne et la $j-$ème colonne de A.

On va utiliser la formule du développement suivant la première ligne:
$detA = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}detA_{1j}$

Soit $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A.

Début de l'algorithme: Si la première ligne de A est nulle, alors dét$A = 0$ et c'est fini. Sinon soit $a_{1k} \neq 0$. On modifie les colonnes de A dans le but d'annuler tous les éléments a_{1j} avec $j \neq k$:

.

$C_j \rightarrow C'_j = C_j - \frac{a_{1j}}{a_{1k}}C_k$ si $j \neq k$ et $C'_k = C_k$.

Ces opérations ne changent pas le déterminant. On obtient une nouvelle matrice $A' = (C'_1, ..., C'_n)$ avec $detA' = detA$ et $a'_{1,j} = 0$ si $j \neq k$ et $a'_{1,k} = a_{1,k}$.

Donc $detA = detA' = (-1)^{1+k}a_{1k}detA_{1k}$.

Ensuite on revient au début de l'algorithme avec la matrice A_{1k} (d'ordre $n-1$) à la place de A.

Le calcul se termine après $n-1$ étapes (au plus tard).
.

23. Déterminant d'un système de vecteurs.

Soit dim$E = n$ et soit $u_1, .., u_n$ une suite de n vecteurs de E. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour tout j, $j = 1, ..., n$, on écrit $u_j = a_{1j}e_1 + ... + a_{nj}e_n$. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice dont les vecteurs colonnes correspondent aux vecteurs $u_1, .., u_n$. On pose $\det_B(u_1, .., u_n) = \det A$ et on l'appelle le **déterminant du système des vecteurs** $u_1, .., u_n$ dans la base B.

Changement de base. Soit B' une autre base de E et P la matrice de passage de la base B vers B'. Alors

$$det_B(u_1, .., u_n) = detP \cdot det_{B'}(u_1, .., u_n)$$

Les propriétés suivantes sont celles du déterminant d'une matrice:
1. $\det_B(u_1, .., u_n)$ est linéaire par rapport à chaque vecteur.
2. $\det_B(u_1, .., u_n)$ change de signe lorsque l'on permute deux vecteurs.
3. $\det_B(u_1, .., u_n) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, .., u_n)$ est liée.
4. $\det_B(u_1, .., u_n) \neq 0$ si et seulement si $(u_1, .., u_n)$ est une base de E.
.

Aire, volume et déterminant.

Soit E un espace vectoriel sur R de dimension n et soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.

24. Proposition. a) Soit $n = 2$. On définit l'unité d'aire dans E en disant que l'aire du parallelogramme construit sur les vecteurs e_1, e_2 est 1. Alors pour tout deux vecteurs v_1, v_2 de E l'aire du parallelogramme construit sur ses vecteurs est
$\mid det_{(e_1,e_2)}(v_1, v_2) \mid$.

b) Soit $n = 3$. On définit l'unité de volume dans E en disant que l'aire du parallelotope construit sur les vecteurs e_1, e_2, e_3 est 1. Alors pour tout trois vecteurs v_1, v_2, v_3 de E le volume du parallelotope construit sur ses vecteurs est
$\mid det_{(e_1,e_2,e_3)}(v_1, v_2, v_3) \mid$.

c) Soit f un endomorphisme de E. Pour toute partie de E de volume (ou aire) fini on a
$volume(f(D)) = \mid detf \mid volume(D)$.

Donc $\mid detf \mid$ est le coefficient de changement du volume (aire) par l'application linéaire f.