Déterminants.

1. Définition. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n.

Le **déterminant** est une application dét: $Mat_n(K) \to K$ défini par récurrence sur n de façon suivante:

- Si $n = 1$, $\det(a_{11}) = a_{11}$;

- pour $n > 1$, soit A_j la matrice (d'ordre $n-1$) obtenue en supprimant la première ligne et la $j-$ème colonne de A. Alors

dét$(A) = a_{11}$dét$A_1 - a_{12}$dét$A_2 + ... + (-1)^{n+1} a_{1n}$dét$A_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} det A_j$

On dit qu'on développe le déterminant suivant la première ligne de A.

En particulier, si $n = 2$, dét$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Exemple important. Le déterminant d'une matrice **triangulaire** (supérieure ou inférieure) est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Remarque. Si une colonne (ou une ligne) de la matrice est nulle, le déterminant est nul.

.

Le déterminant comme une forme multilinéaire alternée.

Soit $C_1, ..., C_n$ les colonnes de la matrice A: $A = (C_1, ..., C_n)$. On peut considérer le déterminant comme une fonction de n variables vectorielles $(C_1, ..., C_n)$.

2. Théorème.

a. Le déterminant est une application linéaire par rapport à chaque colonne.

b. Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.

c. Si l'on échange entre elles deux colonnes, le déterminant change de signe.

On résume les propriétés 1.-3. en disant que le déterminant est une **forme n-linéaire alternée**.

• • *Démonstration.* On procède par récurrence sur n.

a. . Linéarité par rapport à C_j: le terme a_{1j}détA_j est linéaire par rapport à C_j parce que a_{1j} l'est et A_j ne dépend pas de C_j. Si $k \neq j$, les termes a_{1k}détA_k sont linéaires par rapport à C_j parce que détA_k l'est (l'hypothèse de récurrence) et a_{1k} ne dépend pas de C_j.

b. -c. . Soit d'abord $C_k = C_{k+1}$. Si $j \neq k$ et $j \neq k+1$, dét$A_j = 0$ (récurrence). Ensuite, $A_k = A_{k+1}$ et $a_{1k} = a_{1,k+1}$, donc la somme $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} det A_j$ est nulle et dét$A = 0$.

Ensuite on montre que si on échange C_j et C_{j+1}, le déterminant change de signe. En effet,

$0 = det(C_1, ..., C_j + C_{j+1}, C_j + C_{j+1}, ..., C_n) =$

$det(C_1, ..., C_j, C_j, ..., C_n) + det(C_1, ..., C_j, +C_{j+1}, ..., C_n)+$
$det(C_1, ..., C_{j+1}, C_j, ..., C_n) + det(C_1, ..., C_{j+1}, C_{j+1}, ..., C_n) =$
$det(C_1, ..., C_j, C_{j+1}, ..., C_n) + det(C_1, ..., C_{j+1}, C_j, ..., C_n)$
donc
$det(C_1, ..., C_j, C_{j+1}, ..., C_n) = -det(C_1, ..., C_{j+1}, C_j, ..., C_n).$

Ensuite, si $C_j = C_k$, en échangeant les colonnes ajacentes à commencer par C_j on amène C_j à côté de C_k; le déterminant reste le même au signe près, donc il est nul.

Finalement, en développant
$det(C_1, ..., C_j + C_k, ..., C_j + C_k, ..., C_n),$
on montre, comme avant, que si l'on échange C_j et C_k, le déterminant change de signe:
$det(C_1, ..., C_j, ..., C_k, ..., C_n) = -det(C_1, ..., C_k, ..., C_j, ..., C_n).$
• •

3. Corollaire. Le déterminant ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

Calcul des déterminants. En utilisant le corollaire 3 (et en échageant les colonnes si nécessaire) on peut réduire la matrice à une forme triangulaire ("échelonnée" par rapport aux colonnes) exactement comme dans la méthode du pivot; cela permet de calculer le déterminant.

.

Critère d'inversibilité.

Rappellons qu'une matrice est inversible si et seulement si ses colonnes sont linéairement indépendantes (donc forment une base de K^n).

4. Théorème. La matrice $A \in Mat_n(K)$ est inversible si et seulement si dét$A \neq 0$.

D'une manière équivalente, *une famille de vecteurs* $(C_1, ..., C_n)$ *est une base si et seulement si dét*$(C_1, ..., C_n) \neq 0$.

Ou encore d'une manière équivalente, *le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si une de ses colonnes est combinaison linéaire des autres colonnes.*

• • *Démonstration.* a) Soit A non-inversible, donc une des colonnes, disons C_j, est une combinaison linéaire des autres colonnes. En enlevant cette combinaison linéaire de C_j, ce qui ne change pas le déterminant (Corollaire 3), nous obtenons une colonne nulle, donc dét$A = 0$.

b) Soit A inversible, donc les colonnes $(C_1, ..., C_n)$ forment une base de K^n. Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de K^n; écrivons $e_j = \sum_i b_{ij} C_i$. Alors

.

$det(e_1, ..., e_n) = det(\sum_{i_1} b_{i_1 1} C_{i_1}, ..., \sum_{i_n} b_{i_n n} C_{i_n}) =$
$\sum_{i_1, ..., i_n} b_{i_1 1} ... b_{i_n n} det(C_{i_1}, ..., C_{i_n})$

.

Si $i_k = i_j$, on a $det(C_{i_1}, ..., C_{i_n}) = 0$ (deux colonnes égales). Si $i_1, ..., i_n$ est une permutation de $1, ..., n$, on vérifie que $det(C_{i_1}, ..., C_{i_n}) = \pm det(C_1, ..., C_n)$ (à voir plus tard). Mais $det(e_1, ..., e_n) = 1$, donc $det(C_1, ..., C_n) \neq 0$. • •

.

Permutation des colonnes. Formule explicite.

On appelle **permutation** de $\{1, ..., n\}$ toute bijection $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$.

On peut identifier la permutation σ avec la suite de ses valeurs $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ où chaque entier $1, ..., n$ apparait exactement une fois (une telle suite s'appelle *arrangement* d'ordre n).

L'ensemble des permutations de $\{1, ..., n\}$ est noté S_n.

On appelle **transposition** une permutation qui échange entre eux deux entiers et laisse fixes les autres.

5. Proposition. Toute permutation se décompose en produit des transpositions.

Remarque: une telle décomposition n'est pas unique.

• • *Démonstration.* Récurrence sur n: si $\sigma(1) = 1$, alors σ permute les $n-1$ entiers $2, ..., n$ et l'hypotèse de récurrence s'applique. Sinon soit τ la transposiiton qui échange 1 et $\sigma(1)$. Soit $\sigma' = \tau\sigma$; alors $\sigma'(1) = 1$ et l'hypotèse de récurrence s'applique à σ'; mais $\sigma = \tau\sigma'$. Remarquer qu'il suffit au plus $n-1$ transpositions pour décomposer σ. • •

Si τ est une transposition, on sait que $\text{dét}(C_{\tau(1)}, ..., C_{\tau(n)}) = -\text{dét}(C_1, ...C_n)$ (échange de deux colonnes).

6. Proposition. Soit σ le produit de k transpositions. Alors

$\text{dét}(C_{\sigma(1)}, ..., C_{\sigma(n)}) = (-1)^k \text{dét}(C_1, ...C_n)$.

• • *Démonstration.* Après chaque trasposition le déterminant change de signe. • •

7. Corollaire. Le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$ où k est le nombre de transpositions dans une décomposition de σ est indépendant de la décompositon. Ce nombre est appelé **signature** de σ.

La signature a les propriétés suivantes:

a. $\text{dét}(C_{\sigma(1)}, ..., C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\text{dét}(C_1, ...C_n)$.

b. $\varepsilon(\sigma) = \text{dét}(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)})$, où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonoique de K^n.

c. Si τ est une transposition, $\varepsilon(\tau) = -1$.

d. Multiplicativité: pour toutes deux permutations σ_1 et σ_2, on a $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$

e. $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

f. Proposition (sans démonstration). Soit $I(\sigma)$ le nombre des paires (i, j) telles que $i < j$ mais $\sigma(i) > \sigma(j)$. Alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.

.

8. Proposition. Pour $A = (a_{ij})$,

$$det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$$

• • *Démonstration.*
$det(C_1, ..., C_n) = det(\sum_{i_1} a_{i_1 1} e_{i_1}, ..., \sum_{i_n} a_{i_n n} e_{i_n}) =$
$\sum_{i_1,...,i_n} a_{i_1 1} ... a_{i_n n} det(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n} det(e_1, ..., e_n)$
et $det(e_1, ..., e_n) = 1$ (on utilise ici le Théorème 2 et la Proposition 6).
• •