et $k+1 \geq 2$ donc $\frac{1}{(a+n)^{k+1}} \underset{n\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \frac{1}{(a+n)^{k+1}}$ cv

d'où $\sum f^{(k)}$ C.N. (donc C.U.) sur $[a,b]$ $\forall k \geq 1$.

On applique le th. du CM et on obtient que φ est C^∞ sur $[a,b]$ et donc C^∞ sur $\mathbb{R}^+$.

Ex. 8. $u_n(x) = \frac{2x}{x^2+n^2}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Pour $x=0$, $u_n(x) = 0$ $\forall n$ et sinon, $u_n(x) \underset{n\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

d'où la convergence simple

2) $u_n'(x) = \frac{2(x^2+n^2)-4x^2}{(x^2+n^2)^2} = \frac{2(n^2-x^2)}{(\quad)^2} = \frac{2(n-x)(n+x)}{(\quad)^2}$

x	$-\infty$		$-n$		n		$+\infty$
$u_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

. Soit $\alpha > 0$ et $I = [-\alpha, \alpha]$.

Alors pour $n > \alpha$, $u_n'(x) > 0$ sur I.

$$\sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} |u_n(x)| = \sup_{x\in[0,\alpha]} u_n(x) = u_n(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}$$

et $\sum \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}$ cvge $\left(\text{car } = O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

D'où $\sum u_n$ C.N. sur I. La continuité des u_n entraine celle de S sur I et donc S est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$|R_n(x)| = R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+k^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2x}{x^2+k^2}$$

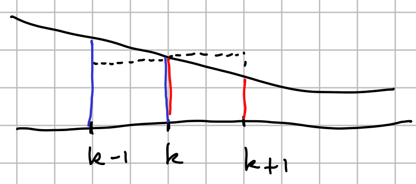
$$|R_n(n)| \geq \frac{2n}{n^2+(n+1)^2} + \frac{2n}{n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{2n}{n^2+(2n)^2}$$ le plus petit

$$\geq n \times \frac{2n}{n^2+(2n)^2} = \frac{2n^2}{5n^2} = \frac{2}{5}$$

D'où $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |R_n(x)| \geq \frac{2}{5}$ et donc pas de C.U. sur $\mathbb{R}^+$

4) Soit $f_x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \frac{2x}{x^2+t^2}$ $\quad$ ($x > 0$ fixé).

f est décroissante et continue.



Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$

On fait $\sum_{k=1}^{n}$: $\int_1^{n+1} \frac{2x}{x^2+t^2}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2+k^2} \leq \int_0^n \frac{2x}{x^2+t^2}\,dt$

On fait tendre $n \to +\infty$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2+t^2}\,dt \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+t^2}\,dt$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2/x}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\,dt \qquad u = \frac{t}{x}, \quad t = x.u \quad dt = x\,du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1+u^2}\, x\,du = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$= 2\left[\operatorname{arctg}\right]_0^{+\infty} = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2+t^2}\,dt = \int_{1/x}^{+\infty} \frac{2}{1+u^2}\,du = 2\left[\operatorname{arctg}\right]_{1/x}^{+\infty}$

$$= \pi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pi$$

D'où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} S(x) = \pi$

Ex. 9

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}$$

1) a) et b) • Soit $t > 0$: $\displaystyle |f_n(t)| = \frac{e^{-nt}}{n+1} = \frac{(e^{-t})^n}{n+1}$

Ici $0 < e^{-t} < e^0 = 1$ d'où $|f_n(t)| \leq (e^{-t})^n$ ← suite géom. de raison e^{-t}

d'où cvgence de $\sum |f_n(t)|$.

• $\displaystyle\sum f_n(0) = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ cvge par le critère sur les séries alternées

c) $\displaystyle |R_n(t)| \leq |f_{n+1}(t)| = \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

d'où $\displaystyle\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |R_n(t)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ d'où C.U. sur $E_s = \mathbb{R}^+$

d) $\displaystyle\sup_{t \in E_s} |f_n(t)| = \sup_{t \in E_a} |f_n(t)| = \frac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n+1}$ diverge

donc pas de C.N ni sur E_s ni sur E_a.

2) • $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f_n(t)$ existe $\forall n$ et $\sum f_n$ C.U. sur $\mathbb{R}^+$

(avec $+\infty$ adhérent à $\mathbb{R}^+$) donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} S(t)$ existe

et vaut $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \lim_{t \to +\infty} f_n(t) = 1$ car $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f_0(t) = 1$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f_n(t) = 0 \ \forall n \geq 1$

3) Montrons que : $\inf(A) > 0 \iff \sum f_n$ C.N. sur A

$\Leftarrow$: Par contraposée si $\underset{\alpha}{\overset{\|}{\inf(A)}} \leq 0$ alors $\sup_{t \in A} |f_n(t)| = \sup_{t \in A} \frac{e^{-nt}}{n+1}$

Soit (x_k) suite de A tq $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{>} \alpha$

on obtient $\sup_A |f_n(t)| \geq f_n(\alpha) = \frac{e^{-n\alpha}}{n+1} \geq \frac{1}{n+1}$

d'où pas de C.N (car $\sum \frac{1}{n+1}$ div).

$\Rightarrow$: Soit $\alpha = \inf(A)$ avec $\alpha > 0$.

Alors $\sup_{t \in A} |f_n(t)| \leq |f_n(\alpha)| = \frac{e^{-n\alpha}}{n+1} = \frac{(e^{-\alpha})^n}{n+1} \leq (e^{-\alpha})^n$

d'où $\sum \sup.$ cvge.