Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2013-2014

Math I Algèbre - Prépa 1ère année. Groupes P3 et P4

Feuille d'exercices n° 5

Géometrie du plan

Exercice 1. On rappelle l'identification canonique de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$ par l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{array}.$$

1. Identifier les transformations complexes suivantes :

$$f_1(z) = z + 3 - 2i;\ f_2(z) = e^{i2\pi/7}z;\ f_3(z) = e^{i2\pi/3}z - 1;\ f_4(z) = 3z - 5 + i;\ f_5(z) = (2+2i)z + 3i.$$

2. Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui representent des transformations du plan suivantes :
   (a) La translation du vecteur d'affixe $-2+i$;
   (b) La symétrie centrale du centre i ;
   (c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1 ;
   (d) L'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe $1+2i.$;
   (e) La similitude de rapport 2 et d'angle $\pi/3$ et de centre $1+i$.
3. Déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes.

$$\varphi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 3, \quad \varphi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto i\,\bar{z}.$$

4. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
5. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Exercice 2. Soit s une similitude directe telle que $s(2-i) = 1$ et $s(-1+2i) = 1+6i$. Déterminer l'homothetie h et la rotation r telles que $s = h \circ r$. Donner l'affixe du point fixe de s.

Exercice 3. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite du plan d'équation $y = 3x$. Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{D}_1$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_1$. Puis calculer la distance du point $M_1 = (3,-1)$ à la droite $\mathcal{D}_1$.

Exercice 4. Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ {appelé le demi-plan de Poincaré} et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Montrer que l'application $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que soient alignés les points d'affixes z, iz et i.

Exercice 6.

1. Soit $v \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer qu'il existe $v^\perp \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $w \in \mathbb{R}^2$, l'on ait : $\det(v, w) = \langle v^\perp, w \rangle$.
   (b) On suppose v non nul. Montrer que $(v, v^\perp)$ est une base orthogonale.
2. Soit A, B et C des points d'affixes respectives a, b et c.
   (a) Exprimer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ à l'aide de a, b et c.
   (b) À quelle condition sur a, b et c les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 7. Déterminer si les couples qui suivent forment des bases du plan. Lorsque ce ne sont pas des bases, écrire explicitement leur colinéarité. Lorsque ce sont des bases, calculer l'aire du parallélogramme correspondant.
a.$((0,0),(0,0))$; **b.**$((0,1),(1,1))$; **c.**$((2,4),(1,2))$; **d.**$((0,0),(1,0))$.

Exercice 8. Soient $B = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soient $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = e_1 - e_2$.

1. Montrer que $B' = \{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que B' définie la même orientation que B ?
3. Calculer les coordonnées d'un vecteur quelconque $V = xe_1 + ye_2$ dans la base B'.
4. Quelle est la matrice de passage de B à la nouvelle base B' ? Et de B' à B ?

Exercice 9.

1. Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $(4,7)$ et de rayon 3.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_2 = \left\{ (x,y) \mid x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0 \right\}$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 10. Déterminez les matrices des applications linéaires suivantes :
$h_1(x,y) = (2x - y, x)$, $h_2(x,y) = (x - y, 0)$, $h_3(x,y) = (x - y, y - x)$

Exercice 11. Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $h(2,1) = (2,-3)$ et $h(1,-1) = (3,-1)$. Déterminez la matrice de h.

Exercice 12. Donnez, pour chaque application linéaire H du plan $\mathbb{R}^2$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, la matrice de H.

1. Symétrie d'axe Ox.
2. Symétrie d'axe Oy.
3. Symétrie d'axe $y = x$.
4. Symétrie d'axe $y = -x$.
5. Projection orthogonale sur Ox.
6. Projection orthogonale sur Oy.
7. Homothétie de centre O et de rapport 2.

8. Rotation de centre O et d'angle $-90°$.
9. Rotation de centre O et d'angle $+180°$.
10. Rotation de centre O et d'angle $+30°$.
11. Rotation de centre O et d'angle θ.
12. Cisaillement : $(x, y) \mapsto (x + ky, y)$.

Lesquelles parmis ces applications sont des similitudes ? Des isométries ?

Rappel : une similitude est une transformation qui multiplie toutes les distances par une constante fixe, appelée son rapport. Les similitudes de rapport 1 sont des isométries. Par exemple, les rotations, les translations et les symétries sont des similitudes de rapport 1.

Exercice 13. Pour tout nombre réel t on pose

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'on a $(R(t))^n = R(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
2. Soit a, b des nombres réels. on suppose que $b \neq 0$ et on considère la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

   Montrer qu'il existe un unique nombre $\lambda > 0$ et un unique $t \in]0, 2\pi[$ tels que $A = \lambda R(t)$
3. Calculer $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}t & -1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.