Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2021-2022

Math III - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1.

1. Soit a un réel, avec $a > 0$. En effectuant une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^a}\, dt$ est convergente.
2. Soit b un réel, avec $b > 1$. En effectuant un changement de variable, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(s^b)\, ds$ est convergente.

Exercice 2.

Discuter en fonction du paramètre réel a l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de la fonction f_a définie pour tout $t > 0$ par :

$$f_a(t) = \frac{(t+1)^a - t^a}{1 - e^{-\sqrt{t}}}.$$

Exercice 3.

On note g la fonction définie pour tout $x > 0$ par :

$$g(x) = \frac{(x - \sin x)\ln(x + x^2)e^{-3x}}{x^{7/2}}.$$

1. (a) Montrer que $\ln(x + x^2) \sim 2\ln x$ quand x tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que g est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
2. La fonction g est-elle intégrable sur $]0, 1]$?

Exercice 4. On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de F.
3. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. Montrer que G est de dimension 3.
4. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$.
5. Déterminer la dimension de $F \cap G$.
6. Montrer que $F \cap G = \mathrm{Vect}\{(-1, 1, 1, 3)\}$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u et p deux endomorphismes de E. On suppose que $p^2 = p$ (on dit que p est un *projecteur*). Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par u si $u(F) \subset F$.

1. Montrer que si u et p commutent (autrement dit $u \circ p = p \circ u$), alors $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{Im}(p)$, on a $p(x) = x$.
3. Montrer que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
4. En utilisant les questions 2 et 3, montrer que si $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u, alors u et p commutent.