
Corrigé du Devoir numéro 3 (partie commune)

Exercice 1.
1. P a 1 comme racine double, si et seulement si, $P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$. On a

$$P'(X) = 4X^3 - 3X^2 - 1,\ P''(X) = 12X^2 - 6X,$$

$$P(1) = 1^4 - 1^3 - 1 + 1 = 0,\ P'(1) = 4 - 3 - 1 = 0,\ P''(1) = 12 - 6 = 6 \neq 0.$$

Donc 1 est bien une racine double de P.

2. Comme 1 est une racine double de P, celui-ci est divisible par $(X-1)^2$. En appliquant une division euclidienne, on obtient $P(X) = (X-1)^2(X^2+X+1)$ (On aurait aussi pu écrire $P(X) = (X-1)^2(X^2+aX+b)$ et déduire a et b par identification). Le polynôme X^2+X+1 n'ayant pas de racines dans $\mathbb{R}$, il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. On en déduit que

$$P(X) = (X-1)^2(X^2+X+1)$$

est la décomposition en produits de polynômes irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$.
Les racines de X^2+X+1 sont $j = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ et $j^2 = \bar{j}$. En effet, $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$ et donc les racines de X^2+X+1 sont les racines troisièmes de l'unité différente de 1. D'où $X^2+X+1 = (X-j)(X-\bar{j})$. D'où

$$P(X) = (X-1)^2(X-j)(X-\bar{j})$$

est la décomposition en produits de polynômes irréductibles de P sur $\mathbb{C}[X]$.

3. La fraction F étant irréductible, le théorème de la décomposition en éléments simples nous garantit l'existence de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) = \frac{\alpha_1}{X-1} + \frac{\alpha_2}{(X-1)^2} + \frac{\beta_1}{X-j} + \frac{\beta_2}{X-\bar{j}}.$$

Comme $F \in \mathbb{R}(X)$ et j est un pôle complexe, on en déduit que $\beta_2 = \bar{\beta}_1$.
• Calcul de α_1. Par la méthode de la dérivation :

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{X^2+X+1}\right)'\Big|_{X=1} = \frac{-2X-1}{(X^2+X+1)^2}\Big|_{X=1} = \frac{-1}{3}.$$

• Calcul de α_2. Par la méthode de la multiplication-évaluation :

$$\alpha_2 = \frac{1}{X^2+X+1}\Big|_{X=1} = \frac{1}{3}.$$

• Calcul de β_1. Par la méthode de la multiplication-évaluation :

$$\beta_1 = \frac{1}{(X-1)^2(X-\bar{j})}\Big|_{X=j} = \frac{1}{(j-1)^2(j-\bar{j})} = \frac{-1}{3j} \times \frac{1}{\sqrt{3}i} = \frac{1}{3\sqrt{3}}i\bar{j}.$$

D'où, la décomposition de F sur $\mathbb{C}[X]$,

$$F(X) = \frac{-1}{3(X-1)} + \frac{1}{3(X-1)^2} + \frac{i\bar{j}}{3\sqrt{3}(X-j)} - \frac{ij}{3\sqrt{3}(X-\bar{j})}.$$

On a

$$\frac{i\bar{j}}{3\sqrt{3}(X-j)}-\frac{ij}{3\sqrt{3}(X-\bar{j})}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\times\frac{i\bar{j}(X-\bar{j})-ij(X-j)}{X^2+X+1}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\times\frac{i(\bar{j}-j)X+i(j^2-\bar{j}^2)}{X^2+X+1}=\frac{X+1}{3(X^2+X+1)}.$$

D'où, la décomposition de F sur $\mathbb{R}[X]$,

$$F(X)=\frac{-1}{3(X-1)}+\frac{1}{3(X-1)^2}+\frac{X+1}{3(X^2+X+1)}.$$

Exercice 2.
1. Comme $F(X)$ est une fraction rationnelle irréductible avec $deg(P)<deg(Q)$ et que les racines de Q sont simples, le théorème de la décomposition en éléments simples, nous garantit l'existence de n nombres complexes $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ vérifiant

$$F(X)=\frac{\lambda_1}{X-a_1}+\cdots+\frac{\lambda_i}{X-a_i}+\cdots+\frac{\lambda_n}{X-a_n}.$$

2. Comme Q est unitaire on peut écrire $Q(X)=\prod_{1\leq k\leq n}(X-a_k)$. Soit $i\in\{1,2,\dots,n\}$ fixé. Par la méthode de multiplication-évaluation, on obtient

$$\lambda_i=\frac{P(a_i)}{\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq i}}(a_i-a_k)}.$$

Or

$$Q(X)=(X-a_i)\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq i}}(X-a_k),\ Q'(X)=\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq i}}(X-a_k)+(X-a_i)\Big(\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq i}}(X-a_k)\Big)'$$

et donc

$$\prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq i}}(a_i-a_k)=Q'(a_i).$$

Exercice 3. Comme le degré de $(X+1)^2$ est 2, le reste $R(X)$ de la division euclidienne de $X^n+nX^{n-1}+X^2+1$ par $(X+1)^2$ est de degré au plus 1. Donc il existe $a,b\in\mathbb{R}$ et $Q\in\mathbb{R}[X]$ tels que $R(X)=aX+b$ et

$$X^n+nX^{n-1}+X^2+1=Q(X)(X+1)^2+aX+b.$$

En évaluant en $X=-1$, on obtient

$$b-a=(-1)^n+n(-1)^{n-1}+2.$$

En dérivant

$$nX^{n-1}+n(n-1)X^{n-2}+2X=2(X+1)Q(X)+Q'(X)(X+1)^2+a$$

et en évaluant de nouveau en $X=-1$,

$$a=n(-1)^{n-1}+n(n-1)(-1)^{n-2}-2.$$

En remplaçant dans la première équation, on obtient

$$b=(-1)^n+n(-1)^{n-1}+2+a=(-1)^n+2n(-1)^{n-1}+n(n-1)(-1)^{n-2}.$$

Exercice 4.
1. On a

$$1+t=1+t+o(t^2),\ 1+e^t=2+t+\frac{1}{2}t^2+o(t^2).$$

En appliquant une division selon les puissances croissantes, on obtient

$$\frac{1+t}{1+e^t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}t^2 + o(t^2)$$

qui est le développement limité recherché.
2. On pose $x = \frac{1}{t}$. Alors

$$f(\frac{1}{t}) = \frac{1+\frac{1}{t}}{1+e^t} = \frac{1+t}{t(1+e^t)}.$$

En utilisant le résultat de la première question, on obtient

$$f(\frac{1}{t}) = \frac{1}{2t} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t + o(t).$$

D'où

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} + \underset{x\to+\infty}{o}(\frac{1}{x})$$

qui est le développement asymptotique recherché.
3. Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}(\frac{1}{x^2})) = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$$

la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est une asymptote.
4. Comme

$$f(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4x} + \underset{x\to+\infty}{o}(\frac{1}{x})$$

le signe de $f(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est le même que celui de $-\frac{1}{4x}$ au voisinage de $+\infty$ et donc la courbe est en-dessous de son asymptote.

Exercice 5. La formule est évidemment vraie pour $x = 0$. Soit $x \in]0, \pi]$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction sin (qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$) sur $[0, x]$, avec reste à l'ordre 4, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4!}\sin(c)x^4.$$

Comme $c \in]0, \pi[$, $\sin(c) > 0$ et donc

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} = \frac{1}{4!}\sin(c) > 0.$$

D'où

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x).$$

Pour obtenir l'inégalité de droite, on applique la formule de Taylor-Lagrange à la fonction sin sur $[0, x]$, avec reste à l'ordre 6. Il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6!}\sin(c).$$

Comme $c \in]0, \pi[$, $\sin(c) > 0$ et donc

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} = -\frac{1}{6!}\sin(c) < 0.$$

D'où

$$\sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 6.

1. Comme $f(0) = 0$ l'inégalité est vraie pour $x = 0$. Soit $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$ et $n \geq 1$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange (on peut aussi appliquer l'égalité) à la fonction f (qui est de classe C^∞) sur l'intervalle $I = [0, x]$ ou $I = [x, 0]$ selon $0 < x$ ou $x < 0$, à l'ordre n. Donc

$$\left| f(x) - f(0) - f'(0)x - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \right| \leq \sup_{t \in I} |f^{(n)}(t)| \frac{|x|^n}{n!}.$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$ et $\sup_{t \in I} |f^{(n)}(t)| \leq \sup_{t \in [-1,1]} |f^{(n)}(t)| \leq n!$, on en déduit l'inégalité recherchée

$$|f(x)| \leq |x|^n.$$

2. Soit $x \in]-1,1[$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |x|^n = 0$. Comme $|f(x)| \leq |x|^n$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit en passant à la limite que $|f(x)| = 0$ et donc $f(x) = 0$.
Comme f est continue et $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$, on déduit que $f(-1) = f(1) = 0$.