Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015
Cursus préparatoire, 1ère année Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 3

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^4 - X^3 - X + 1$.

1. Montrer que 1 est une racine double de P.
2. Déomposer P en produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et ensuite sur $\mathbb{C}[X]$.
3. Soit $F(X) = \dfrac{1}{P(X)}$. Déterminer la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{C}(X)$ et ensuite sur $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 2. Soit $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle irréductible avec $deg(P) < deg(Q)$. On suppose que Q est unitaire, de degré $n \geq 1$ et admet n racines distinctes notées $a_1, \ldots, a_n$.

1. Justifier l'existence de n nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vérifiant
$$F(X) = \frac{\lambda_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{\lambda_i}{X - a_i} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X - a_n}.$$
2. Montrer que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i = \dfrac{P(a_i)}{Q'(a_i)}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X+1)^2$.

Exercice 4.

1. Calculer le développement limité de $\dfrac{1+t}{1+e^t}$ à l'ordre 2 en 0.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^{1/x}}$. Montrer que f admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ de la forme
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$
où a, b, c sont des constantes à déterminer.
3. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$, dont on donnera une équation.
4. Montrer que la courbe représentative de f est en-dessous de l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, on a
$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 6. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{x \in [-1,1]} |f^{(n)}(x)| \leq n!.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, on a
$$|f(x)| \leq |x|^n.$$
2. En déduire que f est identiquement nulle sur $[-1, 1]$.