Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015

Cursus préparatoire, 1ère année

Corrigé du Devoir numéro 2 (partie commune)

Exercice 1. Les racines de X^2+2 dans $\mathbb{C}$ sont $\pm i\sqrt{2}$; donc X^2+2 divise P si, et seulement si, $P(i\sqrt{2}) = P(-i\sqrt{2}) = 0$. Caculons (en utilisant $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$) :

$$\begin{cases} P(i\sqrt{2}) = 4 - 2i\sqrt{2} - 2a + ib\sqrt{2} + 2 \\ P(-i\sqrt{2}) = 4 + 2i\sqrt{2} - 2a - ib\sqrt{2} + 2 \end{cases}$$

On obtient que $P(i\sqrt{2}) = P(-i\sqrt{2}) = 0$ si et seulement si $a=3$ et $b=2$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$.

1. En dérivant terme à terme, on obtient
$$P'(X) = 1 + 2\frac{X}{2} + \cdots + n\frac{X^{n-1}}{n!} = 1 + X + \cdots \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$$
2. Si α est une racine multiple de P, on a à la fois $P(\alpha)=0$ et $P'(\alpha)=0$. Or, d'après le résultat de la question précédente, $P(\alpha) - P'(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n!}$. Par conséquent, la seule racine double possible est $\alpha = 0$. Mais 0 n'est pas racine de P puisque $P(0)=1$; on vient de montrer que P n'a pas de racine double.

Exercice 3. 1. On a $X^2 - X + 1 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(X - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. On a vu que les racines de $X^2 - X + 1$ sont $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, autrement dit $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\bar{\alpha} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ (on aurait pu directement voir que les racines étaient $-j$ et $-j^2$).

   Pour montrer que $P_n(X) = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$, il nous suffit donc de vérifier que α et $\bar{\alpha}$ sont racines de P_n ; comme P_n est à coefficients réels il nous suffit en fait de vérifier que α est racine de P_n. Pour ce faire, on va utiliser le fait que $\alpha - 1 = .-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\frac{\pi}{3}} = j$; donc $(\alpha-1)^2 = j^2$ et $(\alpha-1)^3 = j^3 = 1$; ainsi que le fait que $\alpha^2 = j$ donc $\alpha^6 = 1$.

   On a $P_n(\alpha) = j^{n+2} + \alpha^{2n+1}$ Comme les valeurs des puissances de j dépendent de la valeur de n modulo 3, étudions les trois cas possibles :

$$\begin{cases} n = 3k & : \quad P_n(\alpha) = j^{3k+2} + \alpha^{6k+1} = j^2 + \alpha = j^2 + j + 1 = 0 \ . \\ n = 3k+1 & : \quad P_n(\alpha) = j^{3k+3} + \alpha^{6k+3} = 1 + \alpha^3 = 0 \ . \\ n = 3k+2 & : \quad P_n(\alpha) = j^{3k+4} + \alpha^{6k+5} = j - \alpha^2 = 0 \ . \end{cases}$$

   On obtient donc comme prévu que $P_n(\alpha) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. 1. La fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. En particulier, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young en 0 à n'importe quel ordre. Ici pour l'appliquer à l'ordre 2 on calcule

$$\forall x > -1 \quad f'_\alpha(u) = \alpha(1+u)^{\alpha-1} \quad \text{et} \quad f''_\alpha(u) = \alpha(\alpha-1)(1+u)^{\alpha-2} \ .$$

On a donc $f'_\alpha(0) = \alpha$ et $f''_\alpha(0) = \alpha(\alpha-1)$. La formule de Taylor-young nous permet de retrouver l'expression

$$f_\alpha(u) = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2) \ .$$

2. Comme on peut composer des développements limités, on obtient

$$(1-3x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(-3x) - \frac{1}{9}(-3x)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) = 1 - x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

De même,

$$\begin{aligned}(1+4x+x^2)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}(4x+x^2) - \frac{1}{8}(4x+x^2)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &= 1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\end{aligned}$$

3. Le résultat de la question précédente donne immédiatement que, au voisinage de 0, on a

$$f(x) = -1 - 5x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

4. Comme f a un développement limité à l'ordre 2 en 0, elle y a en particulier un développement limité à l'ordre 1, ce qui est équivalent à dire que f est dérivable en 0. On lit l'équation de la tangente Δ sur le développement limité : c'est $y = -1 - 5x$.
5. Il s'agit d'étudier le signe de $f(x)-(-1-5x)$ au voisinage de 0 ; puisqu'on a $f(x)-(-1-5x) = 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, on obtient que $f(x) - (-1-5x)$ est du même signe que $2x^2$ au voisinage de 0, c'est-à-dire $f(x) \geq 1 - 5x$ pour x suffisamment proche de 0. Par conséquent, au voisinage de 0 le graphe de f est au-dessus de Δ.

Exercice 5. 1. Soit $x > 0$ et différent de 1. En appliquant l'égalité des accroissements finis à ln (qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$), on sait qu'il existe c strictement compris entre 1 et x et tel que

$$\ln(x) = \ln(x) - \ln(1) = \ln'(x)(x-1) = \frac{1}{c}(x-1)\ .$$

Comme $\frac{1}{c} \neq 1$, on voit que $\ln(x) \neq x - 1$. Et dans le cas $x = 1$, on a $\ln(x) - x + 1 = -1 + 1 = 0$.

2. Cherchons séparément des équivalents des fonctions apparaissant au numérateur et au dénominateur de la fonction définissant f. Comme on est au voisinage de 1, posons $x = 1 + u$. Alors on a

$$\begin{aligned}x^x - 1 &= (1+u)^{1+u} - 1 \\ &= \exp\big((1+u)\ln(1+u)\big) - 1 \\ &= \exp\big((1+u)(u + \underset{u\to 0}{o}(u))\big) - 1 \\ &= \exp\big(u + \underset{u\to 0}{o}(u)\big) - 1 \\ &= u + \underset{u\to 0}{o}(u) \\ &= (x-1) + \underset{u\to 0}{o}(x-1)\end{aligned}$$

Et on peut écrire

$$\begin{aligned}\ln(x) - x + 1 &= \ln(1+u) - u \\ &= u - \frac{u^2}{2} - u + \underset{u\to 0}{o}(u^2) \\ &= -\frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2) \\ &= -\frac{(x-1)^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}((x-1)^2)\end{aligned}$$

Comme on peut diviser des équivalents, ceci nous permet de conclure que, au voisinage de 1, f est équivalente à $\frac{-2(x-1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x-1}$.

Exercice 6. Suivons l'énoncé, et commençons par étudier le cas $x > 0$. Dans ce cas, la formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 1 appliquée sur $[0, x]$ à la fonction exp, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, nous garantit l'existence de $c \in]0, x[$ tel que

$$e^x = 1 + x + \exp''(c)\frac{x^2}{2} \ .$$

Comme $\exp''(c) = e^c$ et que $0 \leq e^c \leq e^x$, on en déduit

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^x \ .$$

Si $x = 0$, on a $e^x - 1 - x = e^0 - 1 = 0 \leq e^0$.
Et si $x < 0$, on applique la formule de Taylor-Lagrange sur $[x, 0]$ pour obtenir l'existence de $d \in]x, 0[$ tel que

$$e^x = 1 + x + e^d\frac{x^2}{2} \ .$$

Cette fois-ci, on peut simplement écrire que $0 \leq e^d \leq 1 \leq e^{|x|}$ pour conclure à nouveau que

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}$$

Dans les trois cas, on a obtenu une inégalité plus forte que celle demandée par l'énoncé, et on conclut donc bien que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^x - x - 1| \leq \dfrac{x^2}{2}e^{|x|}$.