Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015

Cursus préparatoire, 1ère année Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 2

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Soit $P(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$. Determiner tous les couples de nombres complexes (a, b) tels que $P(X)$ soit divisible par $X^2 + 2$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P(X) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$.

1. Calculer $P'(X)$.
2. Montrer que $P(X)$ n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3.
1. Factoriser le polynôme $X^2 - X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 4.
1. Pour α un nombre réel, on considère la fonction f_α définie sur $]-1, +\infty[$ par $f_\alpha(u) = (1+u)^\alpha$. A l'aide de la formule de Taylor-Young, retrouver le développement limité de $f_\alpha(u)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. A l'aide du résultat de la question précédente, donner le développement limité de $(1-3x)^{\frac{1}{3}}$ et $(1+4x+x^2)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
3. Dans la suite de l'exercice on considère la fonction f définie au voisinage de 0 par la relation
$$f(x) = (1 - 3x)^{\frac{1}{3}} - 2(1 + 4x + x^2)^{\frac{1}{2}} \ .$$
Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
4. Montrer que f est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente Δ au graphe de f en 0.
5. Montrer que, au voisinage de 0, le graphe de f est au-dessus de Δ.

Exercice 5.
1. Montrer que, pour $x > 0$, on a $\ln(x) = x - 1$ si, et seulement si, $x = 1$.
2. Pour $x > 0$ et différent de 1, on pose $f(x) = \dfrac{x^x - 1}{\ln(x) - x + 1}$. Donner un équivalent simple de f au voisinage de 1.

Exercice 6. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|e^x - x - 1| \leq \dfrac{x^2}{2} e^{|x|}$.
(On pourra distinguer les cas $x > 0$, $x = 0$, et $x < 0$).