Exercice 4
Soit A la matrice à coefficients réels donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le polynôme caractéristique p_A de la matrice A.

2) Expliciter une matrice inversible P et une matrice diagonale D qui vérifient la relation : $D = P^{-1}AP$.

Exercice 5
On note $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des matrices carrées $(2,2)$ à coefficients complexes.
On note $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ sa base canonique.
Pour $P \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ inversible, on note Φ_P l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_P : & \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \\ & M & \mapsto & P^{-1}MP. \end{array}$$

1) On note $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ une matrice diagonale à coefficients complexes qu'on suppose inversible :

a) Calculer les quatre matrices $\Phi_D(E_{11})$, $\Phi_D(E_{12})$, $\Phi_D(E_{21})$ et $\Phi_D(E_{22})$, puis expliciter la matrice de Φ_D dans la base $\mathcal{E}$.

b) Déterminer les valeurs propres de Φ_D puis les dimensions respectives des espaces propres. On distinguera trois cas : celui où $a = b$, celui où $a = -b$ et celui où a et b ne sont ni distincts ni opposés.

2) a) Soit $U, V \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ deux matrices inversibles. Montrer que $\Phi_V \circ \Phi_U = \Phi_{UV}$.

b) Soit P, $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ deux matrices inversibles. Montrer que, si on note $\Psi = \Phi_{Q^{-1}}$, on a la relation :

$$\Phi_{Q^{-1}PQ} = \Psi^{-1} \circ \Phi_P \circ \Psi.$$

c) Soit $P, P' \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ deux matrices inversibles semblables. Montrer que les matrices de Φ_P et $\Phi_{P'}$ dans la base canonique $\mathcal{E}$ sont semblables.

3) Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ une matrice inversible qu'on suppose dans cette question **diagonalisable**. On note $\{a, b\}$ le spectre de P, $s = a + b$ et $p = ab$.

a) En utilisant les questions 1 et 2 c), montrer que le spectre de Φ_P est $\{1, a/b, b/a\}$. L'endomorphisme Φ_P est-il diagonalisable ?

b) Écrire le polynôme caractéristique de P en fonction de s et p.

c) Montrer que le polynôme caractéristique de Φ_P est égal à :

$$(X-1)^2(X^2 + \frac{2p - s^2}{p}X + 1).$$

4) Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ une matrice inversible qu'on suppose dans cette question **non diagonalisable**.

a) Montrer que le spectre de P est un singleton $\{a\}$.

b) Justifier l'existence d'une matrice inversible Q telle que la matrice $Q^{-1}PQ$ soit triangulaire supérieure. Dans la suite on notera $T = Q^{-1}PQ$, puis pour tout complexe ϵ on notera $T_\epsilon = T + \epsilon E_{22}$ et $P_\epsilon = QT_\epsilon Q^{-1}$.

c) Soit ϵ non nul. Montrer que T_ϵ est diagonalisable.

d) Soit ϵ non nul. Montrer que P_ϵ est diagonalisable.

Attention : le sujet est en pratique fini là, le e) et f) qui suivent sont difficiles et hors barême, ne vous y risquez que si vous avez fait tout le reste.

e) En utilisant la question 3 c), déterminer le polynôme caractéristique de Φ_{P_ϵ} pour ϵ non nul, puis en déduire celui de Φ_P.

f) Φ_P est-il diagonalisable ?