Chapter 6

Fonctions : limites, continuité, dérivabilité

6.1 Limites

La définition des limites pour les fonctions est assez proche de ce que l'on a vu pour les suites. La différence vient essentiellement du fait que pour les suites on ne pouvait considérer que la limite quand n tend vers $+\infty$. Pour une fonction f on peut considérer la limite de f en tout point de son domaine, ou du "bord" de son domaine.

L'idée de base est la même. On dit que la limite de f est b quand x tend vers a si, pour toute marge $\varepsilon > 0$ petite et choisie à l'avance, la fonction vérifie $|f(x) - b| \leq \varepsilon$ pour peu qu'on prenne x suffisamment proche de a, i.e. $|x - a| \leq \delta$, pour un certain δ.

Voici les définitions. On considère une fonction f définie sur un domaine D. On ne peut parler de limite de la fonction f qu'en des points *adhérents* à D, c'est à dire des points qui sont limites d'une suite de points de D. Cela inclut en particulier les points de D eux-mêmes. De manière équivalente, un point $p \in \mathbb{R}$ est *adhérent* à D si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists x \in D\,;\ |x - p| \leq \varepsilon\,.$$

On peut aussi regarder la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ si ces valeurs sont limites de points de D (i.e. si D est non majoré, resp. non minoré). On dit parfois, pour faire plus simple, dans ces cas que $+\infty$ (ou $-\infty$) est *adhérent* à D. On ne dit par contre pas *point adhérent* dans ces cas. Nous pouvons maintenant passer aux définitions des limites.

On dit que

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\,;\; x \in D\,,\; |x-a| \leq \delta \implies |f(x)-b| \leq \varepsilon\,.$$
On dit que
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$
si
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0\,;\; x \in D\,,\; |x-a| \leq \delta \implies f(x) \geq A\,.$$
On dit que
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$
si
$$\forall A < 0, \exists \delta > 0\,;\; x \in D\,,\; |x-a| \leq \delta \implies f(x) \leq A\,.$$
On dit que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$
si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0\,;\; x \in D\,,\; x \geq B \implies |f(x)-b| \leq \varepsilon\,.$$
On dit que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
si
$$\forall A > 0, \exists B > 0\,;\; x \in D\,,\; x \geq B \implies f(x) \geq A\,.$$
On dit que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
si
$$\forall A < 0, \exists B > 0\,;\; x \in D\,,\; x \geq B \implies f(x) \leq A\,.$$
Avec les limites de fonctions on a aussi les notions très importantes de *limites à gauche* et de *limites à droite*.
On dit que
$$\lim_{x\to a+} f(x) = b$$
si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\,;\; x \in D\,,\; a < x \leq a+\delta \implies |f(x)-b| \leq \varepsilon\,.$$
On dit que
$$\lim_{x\to a-} f(x) = b$$
si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\,;\; x \in D\,,\; a-\delta \leq x < a \implies |f(x)-b| \leq \varepsilon\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to a+} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0\,;\ x \in D\,,\ a < x \leq a + \delta \implies f(x) \geq A\,.$$

On dit que

$$\lim_{x \to a-} f(x) = +\infty$$

si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0\,;\ x \in D\,,\ a - \delta \leq x < a \implies f(x) \geq A\,.$$

etc.

6.2 Propriétés des limites

Il existe une caractérisation utile des limites de fonctions en terme de suites.

Proposition 6.2.1 *Une fonction réelle f admet une limite l finie, ou infinie, en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) dans* Dom f *telle que* $\lim x_n = a$*, on a* $\lim f(x_n) = l$*. On a la caractérisation analogue pour les limites à gauche et à droite.*

Démonstration Faisons le cas d'une limite finie, en un point fini. Les autres cas sont laissés en exercice.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et si (x_n) est une suite dans Dom f telle que $\lim x_n = a$ alors

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,;\ x \in \mathrm{Dom}\ f\,,\ |x - a| \leq \delta\ \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon\,.$$

Mais pour ce $\delta > 0$ donné, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|x_n - a| \leq \delta$. On aura donc $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$. D'où le résultat dans un sens.

Pour prouver la réciproque on va raisonner par l'absurde. Supposons le contraire de $\lim_{x \to a} f(x) = l$. C'est à dire supposons

$$\exists \varepsilon > 0\,,\ \forall \delta > 0\,,\ \exists x \in \mathrm{Dom}\ f\,;\ |x - a| \leq \delta\,,\ |f(x) - l| > \varepsilon\,.$$

Prenons $\delta = 1/n$ et notons x_n un de ces x tels que ci-dessus. On a $|x_n - a| \leq 1/n$, donc la suite (x_n) tend vers a (et elle est incluse dans Dom f). Mais pourtant $|f(x_n) - l| > \varepsilon$ et donc $(f(x_n))$ ne tend pas vers l. On a montré qu'il existe une suite (x_n) dans Dom f qui tend vers a et telle que $(f(x_n))$ ne tend pas vers l. Ce qui est exactement la contraposée de “pour toute suite (x_n) dans Dom f telle que $\lim x_n = a$, on a $\lim f(x_n) = l$”. $\square$

Avec cette caractérisation par les suites de la limite des fonctions, on voit assez facilement que tous les résultats du Théorème 5.5.1 vont passer, sans modification, aux limites de fonctions pour l'addition, la multiplication, le quotient etc. Nous n'énonçons pas explicitement ce théorème.

Par contre on a un point nouveau avec les fonctions, ce sont les compositions de limites.

Proposition 6.2.2 *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *et si* $\lim_{x\to l} g(x) = L$ *alors* $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = L$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in$ Dom g tel que $|x - l| \leq \delta$ on ait $|g(x) - L| \leq \varepsilon$. Soit $\delta' > 0$ tel que si $x \in$ Dom f et $|x - a| \leq \delta'$ alors $|f(x) - l| \leq \delta$. On a donc pour $|x - a| \leq \delta'$ la relation $|g(f(x)) - L| \leq \varepsilon$ si $x \in$ Dom f et si $f(x) \in$ Dom g, c'est à dire si $x \in$ Dom $g \circ f$. D'où le résultat. $\square$

On dit qu'une fonction f a une certaine propriété P (par exemple est croissante) au *voisinage* d'un point a adhérent à Dom f, si il existe $\delta > 0$ tel que la propriété P est vérifiée pour tout $x \in$ Dom $f \cap [a - \eta, a + \eta]$. On dit qu'une fonction f a une propriété P au *voisinage à gauche* d'un point a adhérent à Dom f, si il existe $\delta > 0$ tel que la propriété P est vérifiée pour tout $x \in$ Dom $f \cap [a - \eta, a[$. De même on définit *voisinage à droite.*

On dit que f a une propriété P au *voisinage* de $+\infty$ si $+\infty$ est adhérent à Dom f et si il existe $A > 0$ tel que que la propriété P est vérifiée pour tout $x \in$ Dom $f \cap [A, +\infty[$. On a la définition analogue en $-\infty$.

Avec cette notion de propriété au voisinage, on a les analogues suivants de théorèmes déjà démontrés pour les suites. Les démonstrations découlent très facilement de la caractérisation de la convergence par les suites (Proposition 6.2.1).

Théorème 6.2.3 *Soit* $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. *Si f est croissante au voisinage de a alors f est convergente en a. En particulier :*

– Si f est croissante majorée au voisinage à gauche de a, alors f admet une limite finie à gauche en a.

– Si f est croissante non majorée au voisinage à gauche de a, alors f tend vers $+\infty$ à gauche en a.

– Si f est croissante minorée au voisinage à droite de a alors f admet une limite finie à droite en a

– Si f est croissante non minorée au voisinage à droite de a alors f tend vers $-\infty$ à droite en a.

6.3 Continuité

Une fonction f est *continue* en un point $a \in \operatorname{Dom} f$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

Si f est continue en tout point a d'un ensemble $A \subset \operatorname{Dom} f$, on dit que f est *continue sur* A.

Si $a \notin \operatorname{Dom} f$ est un point adhérent de $\operatorname{Dom} f$, on dit que f se *prolonge par continuité* en a si $l = \lim_{x\to a} f(x)$ existe et est finie. Dans ce cas, on prolonge f en posant $f(a) = l$, qui devient du coup continue en a.

Par exemple, $x \mapsto f(x) = \sin(x)/x$ est fonction définie seulement sur $\mathbb{R}^*$. Mais on peut montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Donc f trouve un prolongement naturel en posant $f(0) = 1$, ce qui en fait une fonction continue sur tout $\mathbb{R}$.

Le théorème qui suit rassemble les opérations usuelles sur les fonctions qui préservent la propriété de continuité. C'est un théorème maintenant facile (nous laissons la preuve au lecteur) mais néanmoins très important, puisque c'est celui qui justifie la continuité de la plupart des fonctions.

Théorème 6.3.1 *Soient f et g deux fonctions réelles.*
1) Si f et g sont continues au point x alors $f + g$ et fg sont continues au point x. Il en va de même pour f/g à condition que $g(x) \neq 0$.
2) Si f est continue en x et si g est continue en $f(x)$ alors $g \circ f$ est continue en x.

Corollaire 6.3.2 *Soit f une fonction réelle. Si (u_n) est une suite dans* $\operatorname{Dom} f$ *qui converge vers $l \in$* $\operatorname{Dom} f$ *et si f est continue en l, alors* $\lim f(u_n) = f(l)$.

Quelques exemples des fonctions continues, avec les preuves.
1) Toutes les fonctions puissances sont continues sur leur domaine de définition. En effet, pour les puissances entières on a, pour tout $x, h \in \mathbb{R}$

$$(x + h)^n = x^n + h \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{n} h^{i-1} x^{n-i}\,.$$

Le dernier terme à droite tend vers 0 quand h tend vers 0, donc $\lim_{h\to 0}(x + h)^n = x^n$. On a prouvé la continuité de $x \mapsto x^n$ sur tout $\mathbb{R}$.
Maintenant, par le Théorème 6.3.1, on voit facilement que
– Toutes les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$,

– Toutes les fonctions quotients de polynômes sont continues en tout point où le dénominateur ne s'annule pas. Ca vaut en particulier pour les fonctions $1/x^n$.

Passons aux racines n-ièmes. On prend $x \geq 0$ fixé et on considère d'abord $h > 0$. Comme on a

$$\left(x^{1/n} + h^{1/n}\right)^n = x + h + T$$

avec $T > 0$, on en déduit que

$$\left(x^{1/n} + h^{1/n}\right)^n \geq x + h$$

et donc

$$x^{1/n} + h^{1/n} \geq (x + h)^{1/n}$$

(la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ est croissante, on l'a déjà vu). Donc finalement

$$(x + h)^{1/n} - x^{1/n} \leq h^{1/n} .$$

Prenons maintenant $x > 0$ et $h < 0$ de telle sorte que $x + h \geq 0$. On va trouver de la même manière

$$x^{1/n} - (x + h)^{1/n} \leq (-h)^{1/n} .$$

L'un dans l'autre on a montré que, dans tous les cas, on a

$$\left|(x + h)^{1/n} - x^{1/n}\right| \leq |h|^{1/n} .$$

Ca prouve bien la convergence vers 0 de $(x + h)^{1/n} - x^{1/n}$ quand h tend vers 0. Donc les fonctions racines n-ièmes sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

En appliquant le Théorème 6.3.1 pour la composition des fonctions, on voit que toutes les fonctions puissances rationnelles sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

Prenons d'autres fonctions très classiques. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ car

$$||x + h| - |x|| \leq |h|$$

comme on peut le vérifier assez facilement (faire 4 cas).

On peut aussi démontrer facilement la continuité de cos et sin sur $\mathbb{R}$. En effet, on a $|\sin h| \leq |h|$ pour tout h, comme on peut le vérifier directement sur le cercle trigonométrique. Donc sin est continue en 0. Ensuite comme $\cos h = \sqrt{1 - \sin^2 h}$ pour $-\pi/2 \leq h \leq \pi/2$, on voit que cos est aussi continu en 0. Finalement, avec les formules

$$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

et

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

on a facilement la continuité de cos et sin en tout point. La continuité de tan en découle par quotient, en tout point où cos ne s'annule pas.

Pour exp et ln il n'y a pas grand chose à montrer, elles sont continues par construction. Tout dépend de la manière de les construire, mais en tout cas on est obligé de postuler que l'une ou l'autre est dérivable (donc continue) et l'autre se déduit par fonction réciproque. Ce sont des points sur lesquels nous reviendrons plus tard dans le cours.

6.4 Théorèmes fondamentaux

Dans cette section nous allons montrer deux des théorèmes les plus importants concernant les fonctions continues (à savoir absolument).

Théorème 6.4.1 *Si f est une fonction réelle continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ alors f atteint son* max *et son* min *sur cet intervalle. Autrement dit, il existe $c_-, c_+ \in [a,b]$ tel que $f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+)$ pour tout $x \in [a,b]$.*

Démonstration Nous faisons toute la démonstration en détail pour le max. Le cas du min en découlera facilement en remplaçant f par $-f$.

Tout d'abord, nous montrons que f est majorée sur $[a,b]$. En effet si f est non majorée sur $[a,b]$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) \geq n$. En particulier la suite $(f(x_n))$ tend vers $+\infty$. Mais la suite (x_n) est bornée, elle admet donc une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass), disons (x_{n_k}) convergeant vers l. Comme la suite (x_{n_k}) est dans $[a,b]$, sa limite l aussi. Comme f est continue au point l on doit avoir $\lim f(x_{n_k}) = f(l)$. Ce qui contredit le fait que $\lim f(x_{n_k}) = +\infty$. Donc f est majorée sur $[a,b]$.

L'image de $[a,b]$ par f est un ensemble non vide et majoré, elle admet donc un sup, noté M. D'après la caractérisation du sup on sait qu'il existe une suite dans $f([a,b])$ qui converge vers M. Autrement dit il existe une suite (u_n) dans $[a,b]$ telle que $\lim f(u_n) = M$. On fait alors le même raisonnement, cette suite (u_n) bornée admet une sous-suite convergente (u_{n_k}), de limite notée $c_+ \in [a,b]$. Par continuité de f au point c_+ on a $f(c_+) = \lim f(u_{n_k}) = M$. $\square$

Théorème 6.4.2 (Théorème des valeurs intermédiaires) *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Autrement dit, si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors quelque soient $a, b \in I$ avec $f(a) \neq f(b)$, quelque soit v entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c entre a et b tel que $f(c) = v$.*

Démonstration On peut très bien supposer que $a < b$ et $f(a) < f(b)$ pour fixer les idées ; les autres cas se démontrent exactement de la même façon.

Soit $v \in]f(a), f(b)[$. Considérons l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b[\,;\ f(x) < v\}\,.$$

Cet ensemble est non vide car il contient a et majoré par b. Donc il admet un sup noté c. Comme ce nombre c est limite d'une suite d'éléments de A et que f est continue en c on a $f(c) \leq v$. Nous voulons prouver que $f(c) = v$ ce qui démontrerait le théorème.

Supposons par l'absurde que $f(c) < v$. Posons $\varepsilon = (v - f(c))/2$. Par continuité de f au point c on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in [c, c + \delta[$ alors $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$. En particulier cela donne $f(x) \leq (v + f(c))/2 < v$. Donc tous les points de $[c, c+\delta[$ sont encore dans A. Ce qui contredit le fait que c est un majorant de A. On a donc montré que $f(c) = v$.

Notez que comme $f(c) \neq f(a)$ et $f(c) \neq f(b)$ on a forcement $c \neq a$ et $c \neq b$. □

Corollaire 6.4.3 *L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.*

Démonstration En effet, par le Théorème précédent, l'image est un intervalle. Par le Théorème 6.4.1, la fonction f atteint un max et un min dans l'intervalle, donc l'image est un intervalle fermé $[f(c-), f(c+)]$. □

6.5 Monotonie et continuité

Proposition 6.5.1 *Une fonction injective et continue sur un intervalle I est forcément strictement monotone.*

Démonstration Prenons 3 points $x_1 < x_2 < x_3$ de I. Supposons que $f(x_1) < f(x_3)$ (si c'est le contraire, on inverse facilement le raisonnement). Alors nous allons montrer que forcément $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$. En effet, si par exemple $f(x_2) < f(x_1)$ (on ne peut pas avoir $f(x_2) = f(x_1)$ à cause de l'injectivité), d'après le Théorème des valeurs intermédiaires f prend toutes les valeurs de l'intervalle $[f(x_2), f(x_3)]$ dans l'intervalle $[x_2, x_3]$. Donc en particulier f repasse par la valeur $f(x_1)$, ce qui contredit l'injectivité. Si on a plutôt $f(x_2) > f(x_3)$ on fait un raisonnement analogue.

On a montré que f est strictement monotone sur tout triplet de points de I. Cela s'étend facilement à tout quadruplet $\{a, b, c, d\}$, en regardant les deux triplets $\{a, b, c\}$ et $\{b, c, d\}$.

Maintenant prenons $\alpha < \beta$ quelconques dans I. Supposons que $f(\alpha) < f(\beta)$. Soient $x < y$ quelconques dans I, différents de α, β. Alors, en appliquant la monotonie stricte de f sur le quadruplet $\{\alpha, \beta, x, y\}$ on trouve $f(x) < f(y)$. On a prouvé que f est strictement croissante. Si on avait supposé $f(\alpha) > f(\beta)$ on aurait trouvé f strictement décroissante. $\square$

Théorème 6.5.2 *Toute fonction f strictement croissante sur un intervalle $]a, b[$ admet des limites à gauche et à droite en tout point de cet intervalle. Ces limites sont*

$$f(x-) = \lim_{t \to x-} f(t) = \sup\{f(t)\,;\ t < x\}$$

et

$$f(x+) = \lim_{t \to x+} f(t) = \inf\{f(t)\,;\ t > x\}\,.$$

L'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Démonstration Soit $x_0 \in]a, b[$ fixé. La fonction f est croissante au voisinage de x_0, donc en particulier au voisinage à gauche et elle est majorée par $f(x_0)$, donc elle converge à gauche. On raisonne de même à droite.

Soit maintenant E l'ensemble des points de discontinuité de f, qui est strictement croissante. Pour chaque $x \in E$ la fonction f a une limite à gauche $f(x-)$ et une limite à droite $f(x+)$ qui vérifient par hypothèse $f(x-) < f(x+)$. Soit $q(x)$ un rationnel tel que $f(x-) < q(x) < f(x+)$. Notez que si $x_1 < x_2$ sont deux éléments de E alors $f(x_{1+}) \leq f(x_{2-})$ et donc $q(x_1) < q(x_2)$. L'application $q \ :\ E \to \mathbb{Q}$ est donc injective. Elle est bijective sur son image qui est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Donc E est au plus dénombrable. $\square$

Proposition 6.5.3 *Une fonction strictement monotone sur un intervalle I est continue si et seulement si son image est un intervalle.*

Démonstration On a déjà démontré un sens : si f est continue, l'image de I est un intervalle.

Inversement, si f est, par exemple, strictement croissante et si f avait un point de discontinuité x, on aurait $f(x-) < f(x_+)$. Mais comme $f(x-) = \sup\{f(t)\,;\ t < x\}$ on a $f(t) \leq f(x-)$ pour tout $t < x$. De même on $f(t) \geq f(x+)$ pour tout $t > x$.

Donc dans l'image de f il y a au plus un point dans l'intervalle $]f(x-), f(x+)[$, c'est $f(x)$. Quoi qu'il en soit l'image de f n'est pas un intervalle. $\square$

Théorème 6.5.4 *Soit f une fonction continue injective sur un intervalle I. Soit $J = f(I)$, alors f est bijective de I dans J et sa fonction réciproque f^{-1} est continue sur J.*

Démonstration Il est clair que f est surjective dans J, par définition de J. Donc f est bijective est admet une fonction réciproque f^{-1} bijective de J dans I.

Comme f est injective et continue, elle est strictement monotone. Donc f^{-1} aussi (exercice). Finalement f^{-1} est strictement monotone, son image est un intervalle, donc f^{-1} est continue. □

6.6 Dérivabilité

Dans la suite on va rencontrer souvent des expressions du genre

$$h\,\varepsilon(h)$$

où ε est une fonction non déterminée dont on sait seulement que

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0\,.$$

Comme ça revient souvent, on va utiliser une notation abrégée : $o(h)$.

Par exemple, si j'écris

$$f(h) = 3 + h + o(h)$$

ça veut dire que la fonction f est de la forme $f(h) = 3 + h + h\,\varepsilon(h)$ où ε est une fonction non déterminée dont on sait seulement que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. En fait la partie $o(h)$ est un tapis sous lequel on cache de la poussière, on ne veut pas plus de détail, seulement le fait que cette partie tend vers 0 plus vite que h, ou encore que $o(h)/h$ tend vers 0.

Du coup, une représentation de la forme

$$f(h) = 3 + h - h^2 + o(h)$$

n'a pas beaucoup de sens, car on pourrait aussi bien l'écrire

$$f(h) = 3 + h + 16h^2 + o(h)$$

en changeant le $\varepsilon(h)$ en $\varepsilon'(h) = \varepsilon(h) - 17h$.

On peut maintenant en venir à nos définitions sur la dérivabilité.

Soit f une fonction réelle et $a \in \mathrm{Dom}\, f$ tel que a soit aussi adhérent à $\mathrm{Dom}\, f \setminus \{a\}$. On dit que f est *dérivable* en a si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'(a)$, la *dérivée* de f au point a. Souvent on écrit la condition ci-dessus plutôt sous la forme

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(a)\,.$$

De la même façon on définit les fonctions *dérivables à gauche* en a, *dérivables à droite* en a. On parle alors de *dérivée à gauche* et de *dérivée à droite*, parfois notées $f'(a-)$, $f'(a+)$.

Si f est dérivable en tout point d'un ensemble I (souvent un intervalle), on dit que f est *dérivable sur* I. Dans ce cas, on peut considérer la fonction

$$\begin{array}{rcrcl} f' & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f'(x)\,. \end{array}$$

C'est la *fonction dérivée* de f sur I.

Une remarque extrêmement importante. Si f est dérivable au point a cela veut dire que si l'on pose

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$$

alors

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0\,.$$

Ou encore

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)\,,$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Ce qui veut dire

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

au voisinage de 0, ou encore

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x)$$

au voisinage de a.

Comment doit-on comprendre une telle relation ? Elle veut dire que près de a la fonction f est presque affine ($f(a+h) = f(a)+hf'(a)$) et qu'en disant ça on commet une erreur $h\varepsilon(h)$ c'est à dire bien plus petite que h (surtout quand h est petit). Le plus souvent d'ailleurs $\varepsilon(h)$ est de l'ordre de h

Notez que l'inverse est vrai, si

$$f(a+h) = f(a) + h\gamma + o(h)$$

alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est égale à γ. Ce qui veut dire que f est dérivable en a et que $f'(a) = \gamma$.

Proposition 6.6.1 *Une fonction f dérivable en a est forcement continue en a.*

Démonstration En effet $f(a+h) = f(a)+hf'(a)+o(h)$ donc $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. $\square$

Théorème 6.6.2 *Si f et g sont dérivables au point a alors $f+g$ et fg le sont aussi avec*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \qquad \textit{et} \qquad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$

Si de plus $g(a) \neq 0$ alors f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

Démonstration Pour l'addition c'est facile

$$\frac{f(a+h)+g(a+h)-(f(a)+g(a))}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\,.$$

Pour le produit, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(a+h)g(a+h) &= (f(a)+hf'(a)+o(h))(g(a)+hg'(a)+o(h)) \\ &= f(a)g(a) + h\,(f'(a)g(a)+f(a)g'(a)) + \\ &\quad + \big(o(h)h(f'(a)+g'(a)) + h^2 f'(a)g'(a) + o(h)o(h)\big) \\ &= f(a)g(a) + h\,(f'(a)g(a)+f(a)g'(a)) + o(h)\,. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Voyons enfin la dérivée de $1/g$. Notez d'abord que

$$\frac{1}{1+h\gamma} = 1 - h\gamma + \frac{h^2\gamma^2}{1+h\gamma} = 1 - h\gamma + o(h)\,.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(a+h)} &= \frac{1}{g(a)+hg'(a)+o(h)} \\ &= \frac{1}{g(a)}\,\frac{1}{1+h\frac{g'(a)}{g(a)}+o(h)} \\ &= \frac{1}{g(a)}\left(1-h\frac{g'(a)}{g(a)}+o(h)\right) \\ &= \frac{1}{g(a)}-h\frac{g'(a)}{g(a)^2}+o(h)\,.\end{aligned}$$

Cela prouve que $1/g$ est dérivable en a, de dérivée

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

La formule pour $(f/g)'$ découle alors facilement par

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

□

Théorème 6.6.3

1) Si g est dérivable au point a et si f est dérivable au point $b = g(a)$ alors $f \circ g$ est dérivable au point a et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)\, f'(g(a))\,.$$

2) Si f est bijective, continue, dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Démonstration

1) On sait que $g(a+h) = g(a) + hg'(a) + o(h)$ et que $f(b+h) = f(b) + hf'(b) + o(h)$. En particulier

$$\begin{aligned} f(g(a+h)) &= f(b + hg'(a) + h\varepsilon(h)) \\ &= f(b) + (hg'(a) + h\varepsilon(h))f'(b) + o(h) \\ &= f(g(a)) + hg'(a)f'(b) + o(h)\,. \end{aligned}$$

2) Posons $b = f(a)$, de sorte que $f^{-1}(b) = a$. Comme f^{-1} est continue (Théorème 6.5.4) on a $f^{-1}(b+h) = f^{-1}(b) + \gamma(h)$ où $\lim_{h\to 0}\gamma(h) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} &= \frac{a + \gamma(h) - a}{b + h - b} \\ &= \frac{a + \gamma(h) - a}{f(a + \gamma(h)) - f(a)} \\ &= \frac{\gamma(h)}{\gamma(h)f'(a) + \gamma(h)\varepsilon(\gamma(h))} \\ &= \frac{1}{f'(a) + \varepsilon(\gamma(h))}\,. \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0 alors $\gamma(h)$ tend vers 0 et $\varepsilon(\gamma(h))$ aussi. Donc la limite de l'expression ci-dessus est

$$\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

$\square$

6.7 Fonctions usuelles

Voyons à la main la dérivabilité et la dérivée des fonctions usuelles.

La fonction $f(x) = x^n$. On a

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \frac{nhx^{n-1} + h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{n} h^{k-2}x^{n-k}}{h} \\ &= nx^{n-1} + o(h)\,.\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat bien connu que f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Pour $f(x) = x^{-n} = 1/x_n$, on utilise le théorème général pour $1/g$ et on voit que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}\,.$$

Regardons la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ sur $\mathbb{R}^+$. C'est la fonction réciproque de $f\ :\ x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc elle est dérivable, de dérivée

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{1/n-1}\,.$$

Pour les puissances rationnelles on utilise la composition des fonctions : $x^q = (x^{1/b})^a = f \circ g$. Donc elle est dérivable (sur $\mathbb{R}^*_+$), de dérivée

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) = g'(x)\,f'(g(x)) &= \left(\frac{1}{b}\,x^{1/b-1}\right)\,a(x^{1/b})^{a-1} \\ &= \frac{a}{b}\,x^{a/b-1} = qx^{q-1}\,.\end{aligned}$$

Donc dans tous les cas, on a toujours trouvé la même formule : $(x^q)' = qx^{q-1}$.

On va s'attaquer aux dérivées de sin, cos et tan. On va commencer par le résultat clef :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1\,.$$

Dans le cercle trigonométrique on regarde le secteur d'angle h petit (i.e. $\in]-\pi/2, \pi/2[$). La surface du tringle intérieur est inférieure à la surface du secteur angulaire, qui est inférieure à la surface du triangle extérieur :

$$\frac{1}{2}\cos(h)\sin(h) \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\tan(h)}{2}\,.$$

Ce qui donne

$$\cos(h) \leq \frac{\sin(h)}{h} \leq \frac{1}{\cos(h)}\,.$$

Quand h tend vers 0, les deux membres qui encadrent tendent vers 1, d'où le résultat.

En particulier ce résultat montre que sin est dérivable en 0, de dérivée 1. Ou encore

$$\sin(h) = h + o(h)\,.$$

Comme $\cos(h) = \sqrt{1-\sin(h)^2}$, pour $h > 0$ petit, on a

$$\cos(h) = \sqrt{1 - h^2 + o(h^2)}\,.$$

Mais la dérivée de $\sqrt{x}$ au point 1 est $1/2$, donc

$$\sqrt{1-h^2+o(h^2)} = 1 + \frac{1}{2}(-h^2+o(h^2)) + \varepsilon(h)(-h^2+o(h^2)) = 1 - \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)\,.$$

En particulier

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0\,.$$

On peut maintenant revenir à $\sin(x)$. On

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\sin(h)+\cos(h)\sin(x)-\sin(x)}{h}\\
&= \cos(x)\,\frac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\,\frac{\cos(h)-1}{h}\,.
\end{aligned}$$

La limite quand h tend vers 0 est donc ici $\cos(x)$. On a montré que $\sin'(x) = \cos(x)$.

De la même façon

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(h)\sin(x)-\cos(x)}{h}\\
&= \cos(x)\,\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\,\frac{\sin(h)}{h}\,.
\end{aligned}$$

La limite quand h tend vers 0 est ici $-\sin(x)$. On a montré que $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Pour $\tan(x)$ on utilise la dérivée de quotient (seulement pour les points où cos ne s'annule pas !) :

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \,.$$

Pour les fonctions log et exp la dérivabilité fait en fait partie de la définition. En particulier $\log(x)$ est défini par

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \,, \qquad \log(1) = 0 \,.$$

Du coup $\exp(x)$ étant la fonction réciproque, on a

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(\exp(x))} = \exp(x) \,.$$

Du coup on peut regarder la dérivée des fonctions puissances réelles. Soit $r \in \mathbb{R}$ alors sur $\mathbb{R}_+^*$ est définie la fonction

$$x^r = \exp(r \log(x)) \,.$$

Elle est donc dérivable, de dérivée

$$\frac{r}{x} \exp(r \log(x)) = r x^{r-1} \,.$$

Faites bien attention à une chose. Si a est un réel > 0 alors la fonction

$$x \mapsto a^x$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$, elle est en fait égale à $e^{x \log(a)}$. Elle est dérivable, mais sa dérivée n'est certainement pas $x\, a^{x-1}$! C'est en fait $\log(a) e^{x \log(a)}$, c'est à dire $\log(a) a^x$.

6.8 Théorèmes fondamentaux de la dérivation

Proposition 6.8.1 *Si f est dérivable et croissante sur I alors sa dérivée est positive sur I.*

Démonstration En effet, si $h > 0$ alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

et si $h < 0$ alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0\,.$$

Donc en passant à la limite, l'inégalité reste. □

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ admet un *minimum local* au point $a \in D$ si il existe $\delta > 0$ tel que $|x - a| \leq \delta$ implique $f(x) \geq f(a)$. C'est à dire que sur l'intervalle $[a - \delta, a + \delta]$ la fonction f atteint un minimum au point a.

De la même façon on définit un *maximum local*. On parle d'*extremum local* pour parler indifféremment de maximum ou de minimum local.

Proposition 6.8.2 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et que I est un intervalle ouvert, alors si a est un extremum local on a $f'(a) = 0$.*

Démonstration Supposons par exemple que f admette un minimum local en a. Le cas où c'est un maximum se traite de la même manière. Soit η tel que les ensembles $\{x \in I\,;\ a - \eta \leq x < a\}$ et $\{x \in I\,;\ a < x \leq a + \eta\}$ soient non vides (ce qui est toujours possible car I est ouvert). Si x est dans le premier ensemble, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0\,,$$

si x est dans le second ensemble, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0\,.$$

Comme les deux quantités tendent vers $f'(a)$ lorsque x tend vers a, alors $f'(a) = 0$. □

Théorème 6.8.3 (de Rolle) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration Si f est une fonction constante sa dérivée est toujours nulle, il n'y a rien à prouver. Supposons f non constante. Alors f admet un minimum global et un maximum global sur $[a, b]$ et ils sont de valeurs différentes. Comme $f(a) = f(b)$, au moins une des deux valeurs a ou b n'est pas un de ces extrema globaux. Ca veut dire qu'il existe $c \in]a, b[$ qui soit un extremum global de f. Donc $f'(c) = 0$. □

Attention, la réciproque est fausse : ce n'est pas parce que $f'(a) = 0$ que ça veut dire que a est un extremum local. Prenez par exemple $a = 0$ pour la fonction $x \mapsto x^3$.

Corollaire 6.8.4 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et si sa dérivée est à strictement positive alors f est strictement croissante.*

Démonstration Comme sa dérivée ne s'annule pas, f est injective (grâce au Théorème de Rolle : si f n'est pas injective, sa dérivée s'annule). Donc f étant continue, elle est strictement monotone (Proposition 6.5.1). Elle est forcément strictement croissante, sinon elle serait strictement décroissante et sa dérivée serait négative. □

Attention, la réciproque est fausse : une fonction peut très bien être strictement croissante et avoir sa dérivée qui s'annule (par exemple $f(x) = x^3$).

Théorème 6.8.5 (des accroissements finis)
1) **Egalité des accroissements finis** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

2) **Inégalité des accroissements finis** *Si de plus il existe m et M des réels tels que $m \leq f'(t) \leq M$ pour tout $t \in]a, b[$, alors*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)\,.$$

En particulier, si $\sup_{t\in]a,b[} |f'(t)|$ est fini, alors

$$|f(a) - f(b)| \leq \sup_{t\in]a,b[} |f'(t)|\,(b - a)\,.$$

Démonstration
1) Posons $\gamma = (f(b) - f(a))/(b - a)$ et $g(x) = f(x) - \gamma(x - a)$ sur $[a, b]$. La fonction g est, comme f, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et elle vérifie $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(a)$. Donc par le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Mais comme $g'(x) = f'(x) - \gamma$, cela donne $f'(c) = \gamma$.
2) On a d'après 1) :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,,$$

mais comme $b - a$ est positif, on passe à l'inégalité sur $m \leq f'(c) \leq M$.

Enfin si $M = \sup_{t\in]a,b[} |f'(t)|$ existe, on a donc $-M \leq f'(t) \leq M$ pout tout $t \in]a, b[$ et on conclut facilement. □

Proposition 6.8.6
1) Une fonction f dérivable sur un intervalle I et dont la dérivée est à valeurs positives est forcement croissante.

2) Une fonction f dérivable sur un intervalle I et dont la dérivée est toujours nulle est forcément constante.

Démonstration

1) Prenons deux valeurs $x < y$ dans I, alors par l'égalité des accroissements finis on a

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

pour un $c \in]x, y[$. Comme $f'(c)$ est positif par hypothèse, on a $f(y) \geq f(x)$. Donc f est croissante.

2) Même idée que ci-dessus, sauf que comme $f'(c) = 0$ on en déduit que $f(x) = f(y)$ pour tus x, y. □

Proposition 6.8.7 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite l au point a alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.*

Démonstration Soit (x_n) une suite dans $I \setminus \{a\}$ qui converge vers a, posons $h_n = |a - x_n|$. On sait qu'il existe $c_n \in]x_n, a[$ ou $\in]a, x_n[$, donc dans tous les cas dans $]a - h_n, a + h_n[$, tel que

$$f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\,.$$

Comme h_n tend vers 0 la suite (c_n) tend vers a, par le théorème des gendarmes. Par hypothèse $f'(c_n)$ tend vers l. On a donc montré que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = l$$

pour toute suite (x_n) qui tend vers a. Par la caractérisation séquentielle de la limite, cela veut dire que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l\,.$$

Autrement dit, le résultat annoncé. □