Exercice 1

1) Un calcul que je ne reproduis pas montre que E_1 est la droite ayant pour base la colonne ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) La troisième colonne est nulle, donc le rang est égal à celui de la matrice où on l'efface ; la quatrième colonne est opposée à la première, donc le rang est inférieur ou égal à 2. Les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang est supérieur ou égal à 2 : le rang est donc 2.

On sait par ailleurs que $\operatorname{rg} A + \dim \operatorname{Ker} A$ est égal au nombre de colonnes de A c'est-à-dire à 4. On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} A = 2$.

3) On remarque dans un premier temps que puisque $Y \in E_1$, $(A - I)Y = 0$ soit $AY = Y$. De même $(A - 2I)Z = 0$ donc $AZ = 2Z$.

En multipliant par A l'identité de l'énoncé, on obtient $AX+AY+AZ = 0$, soit $Y+2Z = 0$. En recommençant, on obtient $AY + 2AZ = 0$ soit $Y + 4Z = 0$. En soustrayant ces deux inégalités on obtient $2Z = 0$ donc $Z = 0$, puis en cascade $Y = 0$ et enfin $X = 0$.

Ceci montre que les trois sous-espaces E_0, E_1 et E_2 sont en somme directe.

4) On remarque que la première et la dernière ligne de $A - 2I$ sont identiques et donc que $\operatorname{rg}(A - 2I) \leq 3$; par la formule du rang comme au 2, on en déduit que $1 \leq \dim E_2$.

Par ailleurs, vu la somme directe montrée à la question précédente, on obtient :

$$\dim E_0 + \dim E_1 + \dim E_2 = \dim(E_0 \oplus E_1 \oplus E_2) \leq \dim E = 4$$

dont on déduit que $\dim E_2 \leq 1$. D'où l'égalité $\dim E_2 = 1$.

(NB : je me suis offert le luxe d'économiser au maximum les calculs, il n'est pas défendu de se contenter d'échelonner $A - 2I$ jusqu'à se rendre compte que son rang est 3).

Puisque $\dim(E_0 \oplus E_1 \oplus E_2) = \dim E_0 + \dim E_1 + \dim E_2$, on obtient $\dim(E_0 \oplus E_1 \oplus E_2) = 4$ donc $E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 = E$.

5) Comme suggéré, introduisons les vecteurs $X \in E_0$, $Y \in E_1$ et $Z \in E_2$ pour lesquels $W = X + Y + Z$. En calculant AW, A^2W et A^3W sur le même modèle qu'à la question 3, on obtient $AW = Y + 2Z$, $A^2W = Y + 4Z$ et $A^3W = Y + 8Z$. On en déduit que ces vecteurs-colonnes appartiennent tous les trois au sous-espace $\operatorname{Vect}(Y, Z)$, qui est de dimension inférieure ou égale à 2, donc que la famille (AW, A^2W, A^3W) est liée. C'est *a fortiori* aussi le cas de (W, AW, A^2W, A^3W) qui n'est donc pas une base de E.

Exercice 2

1) On notera $\deg Q$ le degré d'un polynôme Q. On sait que $\deg P' \leq \deg P = d$, puis que $\deg(P - P') \leq \operatorname{Max}(\deg P, \deg P') \leq d$. Ceci prouve que $P - P' \in \mathbf{R}_d[X]$.

2) La linéarité est une vérification sans subtilité : soit P et Q dans $\mathbf{R}_d[X]$ et α un réel. On constate que $\varphi_d(P + \alpha Q) = (P + \alpha Q) - (P + \alpha Q)' = (P - P') + \alpha(Q - Q') = \varphi_d(P) + \alpha\varphi_d(Q)$.

Deux méthodes possibles pour la bijectivité : l'une est d'expliciter la matrice de φ_d dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^d)$ et constater qu'on obtient une matrice triangulaire (supérieure avec le choix de numérotation fait pour la base canonique), avec des 1 sur la diagonale - donc une matrice inversible. Une autre méthode est de s'intéresser au noyau de φ_d ; soit P un élément de ce noyau et p la fonction polynomiale associée. Cette fonction vérifie l'équation différentielle $p' = p$, c'est donc un multiple réel de la fonction exponentielle tout en étant une fonction polynomiale et c'est donc la fonction nulle. On en déduit que $P = 0$. L'application linéaire φ_d est donc injective, comme c'est un endomorphisme en dimension finie elle est donc bijective.

3) La réponse est oui. Pour l'injectivité, soit P un élément du noyau de φ et d son degré. On a alors aussi $\varphi_d(P) = 0$ et comme φ_d est injective on en déduit que $P = 0$. Pour la surjectivité, soit Q un polynôme et d son degré. Comme φ_d est surjective, il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à d tel que $P - P' = \varphi_d(P) = Q$. On a alors aussi $\varphi(P) = P - P' = Q$.

Exercice 3

1) Quand $u \to 0$, $e^{-cu} - 1 = -cu + o(u) \sim -cu$, puis $f_c \sim -c$. Les fonctions constantes sont intégrables au voisinage de 0 et f_c l'est donc également.

2) Quand $u \to +\infty$, $\frac{g_c(u)}{1/u^2} = ue^{-cu} \to 0$, donc $g_c(u) = o(1/u^2)$. La fonction $u \mapsto 1/u^2$ est intégrable au voisinage de l'infini et g_c l'est donc également.

3) En utilisant les notations des questions précédentes, on remarque que $h_{a,b} = f_a - f_b = g_a - g_b$. La première égalité et la question 1 montrent l'intégrabilité sur $]0, 1]$, la deuxième égalité et la question 2 montrent l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$.

4) Quant t tend vers 0, $k(t) \sim \ln t$. Or la fonction logarithme est "notoirement" intégrable au voisinage de 0 (par exemple parce qu'on sait en trouver une primitive explicite qui a une limite, ou parce qu'elle est négigeable devant $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$). La fonction k est donc elle aussi intégrable au voisinage de 0.

Quand t tend vers $+\infty$, on constate comme à la question 2 que la fonction k est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ et donc elle-même intégrable au voisinage de l'infini.

5)

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^x \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt &= \int_\epsilon^x \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt + \int_x^\epsilon \frac{e^{-t}}{t}\, dt + \int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \\
&= \int_\epsilon^x \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt - \int_\epsilon^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt + \int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \\
&= -\int_\epsilon^x \frac{dt}{t} + \int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = -\ln x + \ln\epsilon + \int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.
\end{aligned}$$

6) On obtient très exactement ce résultat si on effectue une intégration par parties dans $\displaystyle\int_x^\epsilon \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ en dérivant les fonctions $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = \ln t$.

7) a) Soit $x > 0$. En fixant provisoirement $\epsilon > 0$ on écrit l'identité $(*)$ puis on fait tendre ϵ vers 0. L'intégrabilité entraîne la convergence, donc l'intégrale $\displaystyle\int_\epsilon^x \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt$ tend vers $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t} - 1}{t}\, dt$ tandis que l'intégrale $\displaystyle\int_\epsilon^{+\infty} e^{-t}(\ln t)\, dt$ tend vers I. Enfin la quantité $\ln\epsilon - e^{-\epsilon}\ln\epsilon = \ln\epsilon - (1 - \epsilon + o(\epsilon))\ln\epsilon \sim \epsilon\ln\epsilon$ tend vers 0. Il n'y a plus qu'à déplacer quelques termes de part et d'autre du signe égale pour faire apparaître l'identité suggérée.

b) L'intégrabilité de la fonction notée f_1 au 1) entraîne la convergence de son intégrale en 0 et donc que $\displaystyle\int_0^x f_1(t)\, dt$ tend vers 0 quand t tend vers 0. Ce qui se réécrit avec la notation $o(1)$.

8) Fixons provisoirement un $y > 0$. La question 2 rend légitime le découpage :

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}\, ds = \int_y^{+\infty} \frac{e^{-sa}}{s}\, ds - \int_y^{+\infty} \frac{e^{-sb}}{s}\, ds.$$

On effectue le changement de variable $t = as$ et $t = bs$ dans ces deux intégrales. On obtient :

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}\, ds = \int_{ay}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{by}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

On observe que $ay \to 0$ et $by \to 0$ quand $y \to 0$, ce qui légitime l'appel au résultat du 6b), qui fournit :

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}\, ds = (-\ln(ay) + I + o(1)) - (-\ln(by) + I + o(1)) = \ln(b/a) + o(1) \qquad \text{quand } y \to 0,$$

autrement dit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}\, ds = \ln(b/a).$$