Feuille d'exercices n° 8

EXERCICES THÉORIQUES D'INTÉGRATION. EQUATIONS DIFFÉRENETIELLES

1 Intégration

Exercice 8.1. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 0$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.

1. Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. En effectuant une intégration par parties, démontrer que nI_n tend vers $f(1)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 8.2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(0) = \ln(2)$, et pour $x \neq 0$, par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, $F(x) = \ln(2) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-\cos(t)}{t} dt$.
2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout t réel, on a :
$$0 \leq 1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}.$$
En déduire que pour tout x réel, on a l'inégalité : $|F(x) - \ln 2| \leq \frac{3}{4}x^2$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (on pourra intégrer par parties).
5. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $F'(x)$ pour x non nul. Montrer que F est également dérivable en 0 et calculer $F'(0)$.

Exercice 8.3. On définit une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln(t)} \quad \text{pour } t \in]0,1[, f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1.$$

On définit également une application $F :]0,1[\to \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $[0,1]$.
2. Pour $x \in]0,1[$, quel est le signe de $F(x)$?
3. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
4. a) Pour $x \in]0,1[$, montrer que $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)} dt = \ln(2)$.

b) Pour $x \in]0,1[$, montrer les inégalités : $x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x \ln(2)$.

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{x \nearrow 1} F(x)$.

d) En déduire que $\lim_{x \searrow 0} F(x) = 0$.

5. a) Montrer que $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$.

b) Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 8.4. Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(t) = \frac{t^2}{t^2 + \sin^2(t)} \qquad \text{pour } t \neq 0, f(0) = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que f est une fonction continue. Est-elle dérivable ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (sans présupposer son existence).
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose
$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt.$$
Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée. Montrer qu'elle est impaire.
4. Pour $x > 0$ montrer les inégalités
$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1} dt \leq F(x) \leq x$$
et en déduire que
$$x - \arctan(2x) + \arctan(x) \leq F(x) \leq x.$$

Exercice 8.5. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$ 2) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n-1} k^2 \sin\left(k\pi/n\right)$ 3) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$ 4) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$

5) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k + \cos(k)}{k^2+n^2}$ 6) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha+\beta} + \frac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}$

avec α, β deux nombres réels strictement positifs.

2 Équations différentielles du second ordre

Exercice 8.6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y : x \mapsto y(x)$ deux fois dérivable

1) $y'' + 3y' + 2y = 0$, 5) $y'' + y' - 2y = xe^x$, 9) $y'' + y' - 2y = \cos(x) + x^2$,

2) $y'' + 2y' + 2y = 0$, 6) $y'' + 2y' + 2y = (x+1)e^{-x}$, 10) $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin(3x)$,

3) $y'' - 6y' + 9y = 0$, 7) $y'' + y' + y = \cos(3x)$, 11) $y'' - 2y' + y = e^x(x^2+1)$,

4) $y'' + 2y' + y = xe^x$, 8) $y'' + y' = \cos^2 x$, 12) $y'' - 2y' = \mathrm{ch}(x)$.

Identifier pour chacune d'entre elles la solution vérifiant $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Exercice 8.7. A l'aide du changement de fonction $u = xy$, résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle d'inconnue y

$$xy'' + 2y' - xy = 0.$$