Intégrales doubles

Exercice 1

(Simples calculs par tranches) Calculer :

1) $\int\int_D x^2 y\, dx\, dy$ où D est le carré $[0,1]\times[0,1]$.

2) $\int\int_D \dfrac{dx\, dy}{(x+y)^2}$ où D est le carré $[1,2]\times[3,4]$.

3) $\int\int_D xy\, dx\, dy$ où $D=\{(x,y)\ \mid\ 0\leq x\leq 2, 0\leq 2y\leq x\}$.

4) $\int\int_D (x^2+y^2)\, dx\, dy$ où $D=\{(x,y)\ \mid\ x\leq 1, x^2\leq y\leq 2\}$.

Exercice 2

(Une application du jeu sur les tranches)

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$. On pose, pour tout x de $[0,1]$:

$$F_1(x)=\int_0^x \Big(\int_0^z f(y)\, dy\Big)\, dz.$$

1) Justifier que F_1 est de classe $\mathcal{C}^2$, que $F_1(0)=F_1'(0)=0$ et que $F_1''=f$.

2) Montrer que F_1 est la seule fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui remplit toutes ces conditions.

3) En interprétant F_1 comme une intégrale double et en calculant celle-ci différemment, vérifier qu'on a par ailleurs :

$$F_1(x)=\int_0^x (x-y)f(y)\, dy.$$

Essayez d'imaginer une fonction continue K de $[0,1]^2$ vers $\mathbf{R}$ avec laquelle la formule qui précède puisse être réécrite :

$$F_1(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)\, dy.$$

Exercice 3

(Une autre application du jeu sur les tranches)

Soit a et b deux réels strictement positifs. En calculant des deux manières raisonnables l'intégrale : $\int\int_D x^y\, dx\, dy$ où $D=[0,1]\times[a,b]$, en déduire la valeur de l'intégrale simple $J=\int_0^1 \dfrac{x^b-x^a}{\ln x}\, dx$.

Exercice 4

(Et encore une pour la route)

En calculant de deux façons différentes l'intégrale :

$$\int_{(\mathbf{R}^+)^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\, dx\, dy$$

montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 5
(Le changement de variables en polaires)
Calculer en passant en polaires :
1) $\int\int_D (x+y)^2\,dx\,dy$ où D est le disque de centre 0 et de rayon 1.
2) $\int\int_D y\,dx\,dy$ où D est le demi-disque intersection du disque de centre 0 et de rayon 3 et du demi-plan $y \geq 0$.
3) $\int\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$ où D est l'ensemble des (x,y) avec $x \geq 0$ et (x,y) intérieur à la courbe d'équation $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$.

Exercice 6
(Un classique incontournable)
On note $f(t) = e^{-t^2}$, D_R le disque de centre 0 et de rayon R et C_R le carré centré en 0 et de côté $2R$.
1) Montrer que $\int\int_{C_R} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = 4(\int_0^R f(t)\,dt)^2$.
2) En utilisant un changement de variables en coordonnées polaires, calculer $\int\int_{D_R} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, puis sa limite quand R tend vers $+\infty$.
3) En remarquant que C_R contient le disque D_R mais est contenu dans le disque $D_{R\sqrt{2}}$, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, et préciser sa valeur.

Exercice 7
(D'autres changements de variable)
1) Calculer $\int\int_C (x^2-y)\,dx\,dy$ où C est le carré de sommets $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ et $(0,1)$ en effectuant pour changement de variable une rotation d'un huitième de tour.
2) Calculer $\int\int_E \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$ où E est l'intérieur de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
3) Soit P l'ensemble $P = \{(x,y) \mid 0 \leq y-x \leq 1, 0 \leq 2x-y \leq 1\}$.
  a) Dessiner P.
  b) Calculer l'intégrale double $\int\int_P (2x^2-3xy+y^2)\,dx\,dy$ à l'aide du changement de variable $u = y-x$, $v = 2x-y$.

Exercice 8
(Un exemple de calcul d'aire)
Déterminer l'aire de la partie D du plan limitée par les courbes d'équation $y = x$ et $y^2 = x$.

Exercice 9
(Calcul d'aires en passant en polaires)
Soit p une fonction continue de $[0, 2\pi]$ vers $\mathbf{R}^+$, et D le domaine limité par la courbe $r = p(\theta)$ et le segment de Ox qui joint les deux points pour lesquels r vaut respectivement $p(0)$ et $p(2\pi)$.
1) Dessiner D pour $p(\theta) = \dfrac{\theta}{2\pi} + 1$.
2) Montrer que l'aire de D est $\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} p^2(\theta)\,d\theta$.

Exercice 10
(Centres d'inertie)
1) Déterminer le centre d'inertie d'une plaque homogène délimitée par les courbes d'équation $y = x$ et $y = 6x - x^2$ (plaque qu'on dessinera prélablement).
2) Soit P la plaque homogène définie par $x \leq 0$, $y \geq 0$ et $x^2+y^2 \leq 25$. Déterminer son centre d'inertie.

Exercice 11
(Moment d'inertie)
On reprend la même plaque qu'à la deuxième question de l'exercice précédent. Calculer son moment d'inertie par rapport à $(0,0)$.