Chap 3

Déterminants

I Première approche

1) Déterminant d'une famille de vecteurs

On se donne une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E et $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$ une famille de vecteurs de E. Soit $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$. On appelle <u>déterminant</u> de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$, le scalaire

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i), i}}$$

<u>Proposition</u>

Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E, alors $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$.

<u>Dem</u>

$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = I_n$ donc $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \delta_{\sigma(i), i}$

Mais $\prod_{i=1}^{n} \delta_{\sigma(i), i} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = id, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

d'où $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = \varepsilon(id) \times 1 = 1$. ∎

<u>Théorème</u>

L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire, alternée, non nulle.

Toute autre forme n-linéaire alternée sur E est multiple de $\det_{\mathcal{B}}$.

Dem

On pose $\Delta = \det_{\mathcal{B}}$. On sait déjà que $\Delta \not\equiv 0$.

n-linéarité : $\Delta(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha x_j + \beta y_j, x_{j+1}, \dots, x_n) =$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(j-1),j-1} \left(\alpha a_{\sigma(j),j} + \beta b_{\sigma(j),j}\right) \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$= \alpha \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n} + \beta \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$$= \alpha\, \Delta(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) + \beta\, \Delta(x_1, \dots, y_j, \dots, y_n).$$

Alternée

Soit $\tau = (i\,j)$

$$\Delta(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma\circ\tau(1),1} \cdots a_{\sigma\circ\tau(n),n}$$

$$= \sum_{\omega \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\omega \circ \tau^{-1})\, a_{\omega(1),1} \cdots a_{\omega(n),n} \qquad (\sigma = \omega \circ \tau^{-1})$$

$$= -\sum_{\omega \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\omega)\, a_{\omega(1),1} \cdots a_{\omega(n),n} \qquad \left(\varepsilon(\omega \circ \tau^{-1}) = \varepsilon(\omega)\,\varepsilon(\tau^{-1})\right)$$

$$= -\Delta(x_1, \dots, x_n).$$

"Unicité"

Soit φ n-lin. alt. sur E.

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n}\right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}\, \varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

φ est alternée donc nulle dès que $e_{i_\ell} = e_{i_{\ell'}}$. Il ne reste que les $\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ où $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$ 2 à 2 distincts.

$$\Psi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}\, \varphi(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$$

On décompose σ en produit de transpositions $\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$; on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$.

$$\varphi(e_{\tau_1\circ\dots\circ\tau_k(1)},\dots,e_{\tau_1\circ\dots\circ\tau_k(n)}) = -\varphi(e_{\tau_2\circ\dots\circ\tau_k(1)},\dots,e_{\tau_2\circ\dots\circ\tau_k(n)}) =$$

$$= \dots = (-1)^k \varphi(e_1,\dots,e_n).$$

Ainsi $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}\, \varphi(e_1,\dots,e_n)$.

Donc $\varphi = \lambda \Delta$ avec $\lambda = \varphi(e_1,\dots,e_n)$. $\boxed{\Xi}$

Corollaire

L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est lin. en chq variable.

$\det_{\mathcal{B}}$ s'annule sur les familles liées

$\det_{\mathcal{B}}$ est antisymétrique.

2) Changements de base

Théorème

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux base de E, alors $\forall (x_1,\dots,x_n)\in E$ on a

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}'}(x_1,\dots,x_n) = \det_{\mathcal{B}'}\mathcal{B} \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n).}$$

Dem

$\det_{\mathcal{B}'}$ est une forme n-lin. alt. sur E donc $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ avec

$\lambda = \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}$.

Corollaire

$$\boxed{\operatorname{Det}_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} \cdot \operatorname{Det}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = 1.}$$

Théorème

Une famille $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une base de E si et seulement si
$$\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$$

Dem

Si $\mathcal{F}$ est une base, on a vu que $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \cdot \det_{\mathcal{F}} \mathcal{B} = 1 \Rightarrow \det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} \neq 0$.

Si $\mathcal{F}$ n'est pas une base $\Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ est liée $\Rightarrow \det_{\mathcal{B}} \mathcal{F} = 0$. $\square$

II Déterminant d'un endomorphisme

1) Définition

Soit u un endom. de E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. On pose

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}} u = \det_{\mathcal{B}} (u(e_1), \dots, u(e_n)).}$$

Proposition

Pour toute forme n-lin. alt. φ sur E, on a $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$
$$\varphi(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det_{\mathcal{B}} u \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Dem

On sait que $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \alpha \det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$ avec $\alpha = \varphi(e_1,\dots,e_n)$.

Soit $\psi(x_1,\dots,x_n) = \varphi(u(x_1),\dots,u(x_n))$, on vérifie facilement que ψ est aussi n-lin. alt., donc $\psi(x_1,\dots,x_n) = \beta \det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$ avec $\beta = \psi(e_1,\dots,e_n) = \varphi(u(e_1),\dots,u(e_n))$

Donc $\psi(x_1,\dots,x_n) = \varphi(e_1,\dots,e_n) \det_{\mathcal{B}}(u(e_1),\dots,u(e_n)) \det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$

$$= \det_{\mathcal{B}} u \; \varphi(x_1,\dots,x_n).$$

Corollaire

$\boxed{\det_{\mathcal{B}} u \text{ ne dépend pas du choix de la base } \mathcal{B}.}$

Dem

Soit $\varphi = \det_{\mathcal{B}'}$ et $(x_1,\dots,x_n) = (e'_1,\dots,e'_n)$, alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(u(e'_1),\dots,u(e'_n)) = \det_{\mathcal{B}} u \,.\, \det_{\mathcal{B}'}(e'_1,\dots,e'_n) = \det_{\mathcal{B}} u.$$

Ce scalaire unique est appelé déterminant de u et noté $\det u$.

2) Propriétés

Proposition

$\boxed{\det(Id) = 1}$

Dem

$$\det Id = \det_{\mathcal{B}}(Id(e_1),\dots,Id(e_n)) = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1.$$

Proposition

$\boxed{\det(\lambda u) = \lambda^n \det u}$ $(\lambda \in \mathbb{K}, u \in \mathcal{L}(E))$.

Dem

$\det(\lambda u) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda u(e_1), \dots, \lambda u(e_n)) = \lambda^n \det(u(e_1), \dots, u(e_n))$ par n-linéarité! $\blacksquare$

Attention: $\det(\lambda u + \mu v) \neq \lambda \det u + \mu \det v$. L'application det n'est pas lin. en u.

Théorème

$$\boxed{\mathrm{Det}(u \circ v) = \det(u)\det(v)}$$

Dem

Soit $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(v(x_1), \dots, v(x_n))$. C'est une forme n-lin. alt.

donc $= \varphi(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$

Donc $\det v \circ u = \det_{\mathcal{B}}\left(v(u(e_1)), \dots, v(u(e_n))\right) = \det_{\mathcal{B}}(v(e_1), \dots, v(e_n)) \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$

$= \det_{\mathcal{B}} v \cdot \det_{\mathcal{B}} u.$ $\blacksquare$

Corollaire

$$\boxed{\det(u^m) = \det(u)^m}$$

Si u est inversible, alors $\boxed{\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det u}}$

III Déterminant d'une matrice

1) Définition

Il n'y a des déterminants que pour les matrices carrées. ⚠

On pose $\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(i),i}$

noté $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Si $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$, alors $\det A = \det u$.

2) Propriétés

Proposition

$\operatorname{Det} I_n = 1$

$\operatorname{Det}(\lambda A) = \lambda^n \det A$

$\operatorname{Det}(A \cdot B) = \operatorname{Det} A \cdot \operatorname{Det} B$.

$\operatorname{Det}(A^m) = (\operatorname{Det} A)^m$

Si A inversible, $\det(A^{-1}) = 1/\det A$.

Théorème

$\boxed{\det({}^t A) = \det A.}$

Dem

$$\operatorname{Det} {}^tA = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\omega \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\omega^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{\omega(i),i} \qquad (\omega = \sigma^{-1})$$

Mais $\varepsilon(\omega)\varepsilon(\omega^{-1}) = \varepsilon(id) = 1 \Rightarrow \varepsilon(\omega) = \varepsilon(\omega^{-1})$. etc... $\blacksquare$

III Calcul des déterminants

1) Cas $n=2$, $n=3$

• $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad \mathcal{S}_2 = \{id, (12)\}$

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \cdot a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = ad - bc$

• $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $\mathcal{S}_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

$\det = (aei + dhc + gbf) - (dbi + gec + ahf)$

2) Matrices triangulaires

Proposition

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} & \\ 0 & \end{pmatrix}$
alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Dem

$a_{ij} = 0$ pour $i > j$, donc $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = 0$ dès que $\sigma(i) > i$. Il ne reste donc que les σ tq $\sigma(i) \leq i \ \forall i$, c'est à dire

$\sigma(1) = 1$ forcément, puis $\sigma(2) = 2$ etc... $\sigma = id$

$$\det A = \varepsilon(id) \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$ $\blacksquare$

Bien sûr c'est idem pour les triangulaires inférieures car $\det({}^tA) = \det(A)$.

Les matrices diagonales font partie des triangulaires, donc pour elles aussi c'est le produit des coeffs diagonaux.

3) Opérations sur les déterminants

Soit $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

Théorème

- Si une colonne est nulle alors $\det A = 0$
- Si les colonnes sont liées alors $\det A = 0$
- Si on permute les colonnes par σ alors $\det A$ est multiplié par $\varepsilon(\sigma)$.
- Si on multiplie une colonne par λ, le det est multiplié par λ.
- Si une colonne C_j s'écrit $C_j' + C_j''$, alors le det est la somme des 2 det correspondants
- Si on ajoute à une colonne une comb. lin. des autres colonnes, le det est inchangé.

Corollaire

> Par transposition, toutes les propriétés ci-dessus restent vraies pour les lignes au lieu des colonnes.

4) Calcul par triangulation.

$*\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \\ 15 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ (factorisation de 5 et 2 sur C_1 et C_2.)

$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ $(L_2 \mapsto L_2 - 2L_1)$

$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $(L_3 \to L_3 - 3L_1)$

$= -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $(L_3 \leftrightarrow L_2)$

$= -10 \times 1 \times 1 \times 1 = -10.$

$*\begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 0 & c-a & b(c-a) \\ 0 & c-b & a(c-b) \end{vmatrix} = (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$

$= (c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(a-b).$

5) Développement par colonne

Lemme

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Dem

$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} \tilde{a}_{\sigma(i),i}$. notez que $\tilde{a}_{j,n+1} = \delta_{j,n+1}$

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$: ou bien $\sigma(n+1) \neq n+1$ et alors $\prod_{i=1}^{n+1} \tilde{a}_{\sigma(i),i} = 0$, ou bien $\sigma(n+1) = n+1$ et $\prod_{i=1}^{n+1} \tilde{a}_{\sigma(i),i} = \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$.

Mais $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$ telle que $\sigma(n+1) = n+1$, s'identifie clairement à un $\beta \in \mathcal{S}_n$ et il y a bijection !

$\det A = \sum_{\beta \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\beta) \prod_{i=1}^{n} a_{\beta(i),i}$. ∎

Soit A avec des colonnes $A = (C_1 \cdots C_n)$. On écrit $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_i$ où $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ (j est fixé). Donc

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(C_1, \dots, C_{j-1}, E_i, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

On se retrouve donc avec $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ \vdots & 1 & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$ avec 1 en position (i,j).

On fait un permutation $(n, n-1, \dots, j+1, j)$ des colonnes

$$= (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 1 \\ a_{n1} & a_{nj} & & a_{nn} & 0 \end{vmatrix},$$

une permutation $(n, n-1, \dots, i+1, i)$ des lignes :

$$= (-1)^{n-j}(-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ & a_{ij} & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & a_{ij} & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta_{ij}}$$

On a montré $\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}.}$

* $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3) \times (-4) + 3 \times 4 = 24.$$

IV Application des déterminants

1) Formules de Cramer

Théorème

On considère un système

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

que l'on écrit $AX = B$. Si $\det A \neq 0$, alors l'unique solution est donnée par

$$x_j = \frac{|C_1 \cdots C_{j-1} B C_j \cdots C_n|}{\det A}.$$

Dem

$AX = B$ ça veut dire $(C_1 \cdots C_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B$

$\Rightarrow B = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n$. Donc

$$\det(C_1 \cdots C_{j-1} B C_{j+1} \cdots C_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \det(C_1 \cdots C_{j-1} C_i C_{j+1} \cdots C_n)$$

$= x_j \det(C_1 \cdots C_j \cdots C_n) = x_i \det A.$ $\boxtimes$

2) Comatrice

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & a_{ij} & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Comatrice</u> : $\operatorname{com} A = (A_{ij})$

* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{com} A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

<u>Théorème</u>

$$\boxed{\begin{gathered} {}^t(\operatorname{com} A) A = A\, {}^t(\operatorname{com} A) = \det(A) I_n. \\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t(\operatorname{com} A). \end{gathered}}$$

<u>Dem</u>

${}^t(\operatorname{com} A) A = (b_{ij})$ avec

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} {}^t(\operatorname{com} A)_{ik}\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{com} A)_{ki}\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \Delta_{ki}\, a_{kj}$$

Si $i=j$: $b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \Delta_{ki} a_{ki} = \det A$.

Si $i \neq j$: $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \Delta_{ki} a_{kj}$

$= (-1)^{j-i} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \Delta_{ki}\, \tilde{a}_{ki}$ où $\tilde{A} = A$ avec C_j à la place de C_i.

$= (-1)^{j-i} \det \tilde{A} = 0$ car $\tilde{A}$ contient 2 colonnes identiques.