Feuille d'exercices numéro 8
Espaces affines euclidiens

Exercice 1
Soit A, B et C trois points non alignés d'un plan affine euclidien. On note $c = AB$, $b = AC$ et α l'angle en A du triangle (A, B, C).
Exprimer en fonction de b, c et α :

1) Le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

2) La norme du produit vectoriel $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.

3) La valeur absolue du déterminant $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$, calculé dans une base orthonormée du plan ABC. Pourquoi serait-ce une mauvaise idée de chercher à calculer le déterminant proprement dit et non sa seule valeur absolue ?

4) L'aire du parallélogramme ayant AB et AC comme côtés.

5) L'aire S du triangle ABC.

6) Le troisième côté $a = BC$ de ce triangle.

7) Exprimer le rapport abc/S en fonction de a et α. Quel énoncé remarquable peut-on démontrer à partir du résultat obtenu ?

Exercice 2
Soit $R = (O, i, j, k)$ un repère d'un espace affine (de dimension 3) et A et B les points de coordonnées respectives $(0, -1, 2)$ et $(1, 1, 1)$ dans ce repère. On note R_1 le repère (A, i, j, k) et R_2 le repère $(B, -k, -i, j)$. Exprimer les coordonnées d'un point M dans le repère R_2 en fonction de celles dans le repère R_1.

Exercice 3
Dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère, soit les ensembles S_1 et S_2 d'équations respectives $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 14y + 8z + 19 = 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 2z - 11 = 0$. Montrer que S_1 et S_2 sont des sphères dont on précisera centre et rayon, puis déterminer le centre et le rayon du cercle intersection de ces deux sphères.

Exercice 4
Dans un plan affine euclidien muni d'un repère (O, i, j) on considère le triangle (A, B, C) limité par les trois droites d'équations respectives $2x - y + 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ et $2x + y - 2 = 0$ sont alignés. Déterminer l'ensemble des points du plan dont les trois projections orthogonales sur ces trois droites sont alignées.

Exercice 5
Soit D et D' les deux droites d'un espace affine euclidien de dimension 3 dont des équations dans un repère sont respectivement :

$$D : \begin{cases} x = 4z - 1 \\ y = 2z + 3 \end{cases} \qquad D' : \begin{cases} x = -z + 2 \\ y = 2z - 1 \end{cases}$$

Déterminer un système de deux équations cartésiennes représentant la perpendiculaire commune à D et D'.

Exercice 6
On considère la similitude directe s d'écriture complexe, dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$:

$$z' = (i - 1)z + 2 - i.$$

1) Déterminer son centre, son rapport et son angle.

2) On considère dans le plan complexe les points A d'affixe i, B d'affixe -1 et C d'affixe $-i$.

   a) Déterminer les points A', B' et C', images respectives de A, B et C par la similitude s.

   b) Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{A'B'C'}$? de la longueur $A'C'$? de l'aire du triangle $A'B'C'$?

Exercice 7
Dans un plan affine euclidien, soit quatre points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et que $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe qui envoie A sur A' et B sur B'.

1) En utilisant des nombres complexes.

2) Sans nombres complexes, en commençant par traiter le cas où $A = A'$ puis en s'y ramenant.

Exercice 8
Soit E un espace affine euclidien soit f une application affine de E telle que la distance $\|\overrightarrow{Mf(M)}\|$ soit constante. Que dire de f ?

Exercice 9
On considère la transformation d'un espace affine euclidien de dimension 3 dont l'expression analytique dans un repère est :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1 \end{cases}$$

La décrire géométriquement.

Exercice 10
1) Dans $\vec{E}$ espace vectoriel euclidien de dimension 3 muni d'une base orthonormée (i, j, k) on considère l'endomorphisme u de matrice :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Décrire géométriquement u.

2) Dans E espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé (O, i, j, k) on considère l'application f exprimée en coordonnées par les formules :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3 \end{cases}$$

a) On note $\vec{E}_1$ l'axe de la rotation u étudiée au a). Déterminer l'ensemble :

$$\Delta = \{M \in E \mid \overrightarrow{Mf(M)} \in \vec{E}_1\}.$$

f a-t-elle des points fixes ?

b) Écrire f comme une composée $t \circ r$ où r est une rotation affine d'axe Δ et t une translation de vecteur parallèle à Δ.

Exercice 11
Soit E un espace affine et $\vec{E}$ l'espace vectoriel associé.

1) a) Soit f une application affine de E vers E. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un sous-espace affine de E.

b) Montrer que f est réduit à un point si et seulement si 1 n'est pas une valeur propre de l'endomorphisme associé à f.

c) Déduire de la sous-question précédente (ou montrer à la main !) que si E est de dimension 1 et f admet au moins deux points fixes, alors f est l'identité.

2) On suppose $\dim E \geq 2$. Donner un exemple d'application affine de E vers E qui ait au moins deux points fixes sans être l'identité.

3) Existe-t-il des isométries affines de $\mathbf{R}^2$ sans point fixe qui ne soient pas des translations ?