1. Formes bilinéaires. Formes quadratiques.

.

1.1. Définitions. Soit E un espace vectoriel sur K ($K = R$ ou C).

Une **forme bilinéaire** sur E est une application $\varphi : E \times E \to K$ linéaire par rapport à chacune des deux variables.

Une forme bilinéaire φ est **symétrique** si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tout $x, y \in E$. Si $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ pour tous $x, y \in E$, la forme est dite **anti-symétrique** (ou **alternée**).

Chaque forme bilinéaire s'écrit comme la somme d'une forme symétrique et d'une forme anti-symétrique: $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, où

$\varphi_+(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) + \varphi(y, x))$ et $\varphi_-(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) - \varphi(y, x))$.

.

Pour une forme bilinéaire symétrique on définit la **forme quadratique associée** $q_\varphi : E \to K$: $q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$.

.

La forme bilinéaire symétrique est déterminée par la forme quadratique associée:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}[q_\varphi(x + y) - q_\varphi(x - y)]$$

(*"identité de polarisation"*).

.

L'ensemble de toutes les formes bilinéaires (ou de formes symétriques, ou anti-symétriques, ou quadratiques) est un espace vectoriel sur K: si $\varphi_1, ..., \varphi_k$ sont des formes bilinéaires et $a_1, ...a_k$ des scalaires, $a_1\varphi_1 + ... + a_k\varphi_k$ est une forme bilinéaire.

.

Exemples. 1. Si f et g sont deux formes linéaires, $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire.

2. Soit E l'espace des matrices $k \times n$; alors $\varphi(A, B) = tr(AB)$ et $\varphi(A, B) = tr({}^tAB)$ sont des formes bilinéaires symétriques.

3. Soit $E = C([a, b], K)$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, soit $p \in C([a, b], K)$. Alors $\varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)p(t)dt$ est une forme bilinéaire symétrique.

4. Le déterminant en dimension 2: $\varphi(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$ - une forme alternée.

.

1.2. Expression en coordonnées. On suppose que dim $E = n < \infty$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $x = \sum_1^n x_ie_i$, $y = \sum_1^n y_ie_i$.

Alors $\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_iy_j\varphi(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j$ où $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

La matrice $A = (a_{ij}) = (\varphi(e_i, e_j))$ est la *matrice de la forme bilinéaire* φ dans la base $\mathcal{B}$.

La forme φ est symétrique si et seulement si sa matrice (dans n'importe quelle base) est symétrique: $a_{ij} = a_{ji}$, ou ${}^tA = A$. Si φ est symétrique, la forme quadratique associée s'écrit: $q_\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$.

Soit X la colonne des composantes du vecteur x: ${}^tX = (x_1, ..., x_n)$. Alors on peut écrire φ à l'aide de la multiplication matricielle:

$$\varphi(x, y) =^t XAY$$

.

1.3. Changement de base (changement linéaire de coordonnées).
Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une autre base de E, soit X' et Y' les colonnes des coordonnées des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}'$.

On a $X = PX'$ et $Y = PY'$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $\varphi(x, y) =^t XAY =^t X'^tPAPY' =^t X'A'Y'$ où

$$A' =^t PAP$$

est la matrice de la forme φ dans la base $\mathcal{B}'$.

(Noter que si A est symétrique, A' l'est aussi.)

Plus généralement, on peut effectuer une substitution linéaire $X = CX'$ et $Y = CY'$, où $X' =^t (x'_1, ..., x'_k)$ et C est une matrice $n \times k$. Cela donne une forme bilinéaire en k variables $\varphi'(x', y') =^t X'A'Y'$ où $A' =^t CAC$.

Remarque: Poser $X = CX'$ signifie à remplacer les variables $x_1, ..., x_n$ par des formes linéaires en $x'_1, ..., x'_k$.

Si on définit l'application linéaire $f : K^k \to K^n$ par $f(X') = CX$, alors $\varphi'(x', y') = \varphi(f(x'), f(y'))$.

.

1.4. Equivalence des formes. Deux formes bilinéaires φ et φ' définies dans E et E' sont dites **équivalentes** si il existe un isomorphisme $f : E \to E'$ tel que $\varphi(x, y) = \varphi'(f(x), f(y))$.

Si $\dim(E) < \infty$, les formes φ et ψ sont équivalentes si leurs matrices A et B sont liées par $B =^t PAP$ avec P inversible (autrement dit, si on peut trouver deux bases dans lequelles φ et ψ ont la même matrice).

.

1.5. On appelle **rang** d'une forme bilinéaire le rang de sa matrice (il ne dépend pas du choix de la base). On dit que la forme est **non-dégénérée** si son rang est égal à la dimension de E.

Pour une forme φ symétrique son **noyau** est défini par

Ker $\varphi = \{x \in E : \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\}$.

Le noyau de φ est le noyau de (l'application linéaire définie par) la matrice de φ. On a: rang (φ) + dim (Ker φ) = dim (E).

Lemme. *Caractérisation du noyau en termes de la forme quadratique:* $x \in \text{Ker}\ (\varphi)$ si et seulement si $q_\varphi(x+y) = q_\varphi(y)$ pour tout $y \in E$.

.

1.6. Soit φ une forme bilinéaire symetrique. Les vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $\varphi(x,y) = 0$. Une base est dite **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Dans une base orthogonale la forme s'écrit $\varphi(x,y) = \sum_1^n a_i x_i y_i$, et sa matrice est diagonale. La forme quadratique associée devient alors une combinaison linéaire de carrés: $q(x) = \sum_1^n a_i x_i^2$.

Le rang de φ (ou de q) est le nombre de coefficients a_i non-nuls. Le noyau de φ est engendré par les vecteurs de base e_i pour lesquels $a_i = 0$.

.

1.7. Orthogonalisation de Gauss (réduction en carrés).

L'orthogonalisation de Gauss permet de fabriquer une base orthogonale pour la forme quadratique $q_\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ par des changements de coordonnées successives.

.

Cas 1. Il existe i tel que $a_{ii} \neq 0$. Soit $a_{11} \neq 0$ (quitte à changer la numérotation). On écrit

$q_\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j =$

$a_{11}(x_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j)^2 + \sum_{i,j=2}^n a_{ij} x_i x_j - (\frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j)^2$

$= a_{11} y_1^2 + q_1(x_2, ..., x_n)$, où $y = x_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j$.

Ensuite il reste à diagonaliser la forme $q_1(x_2, ..., x_n)$ (récurrence).

Cas 2. $a_{ii} = 0$ pour tout i . Si $a_{1j} = 0$ pour tout j, la variable x_1 n'apparait pas dans la forme et la récurrence s'applique. Soit $a_{1j} \neq 0$ Pour simplifier, soit $j = 2$.

On écrit

$q_\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{12}(x_1 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{j=3}^n a_{2j} x_j)(x_2 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{j=3}^n a_{1j} x_j)$

$+ \sum_{i,j=3}^n a_{ij} x_i x_j - \frac{1}{a_{12}} (\sum_{j=3}^n a_{1j} x_j)(\sum_{j=3}^n a_{2j} x_j)$

$= a_{12} y_1 y_2 + q_2(x_3, ..., x_n)$.

où $y_1 = x_1 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{j=3}^n a_{2j} x_j$ et $y_2 = x_2 + \frac{1}{a_{12}} \sum_{j=3}^n a_{1j} x_j)$.

Ensuite on pose $z_1 = y_1 + y_2$, $z_2 = y_1 - y_2$ et on a $y_1 y_2 = \frac{1}{4}(z_1^2 - z_2^2)$.

Après cela il reste à diagonaliser la forme $q_2(x_3, ..., x_n)$.

.

1.8. Equivalence des formes quadratiques.

Deux formes quadratiques sont **équivalentes** si les formes bilinéaires symétriques associées sont équivalentes: q_1 et q_2 sont équivalentes si il existe un isomorphisme $f : E \to E$ tel que $q_2(x) = q_1(f(x))$. Les matrices A_1 et A_2 des deux formes sont liées par $A_2 =^t PA_1P$ avec P inversible.

Pour une forme réduit en carrés on écrit
$q(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i^2$ avec $a_i \neq 0$, $i = 1, ..., k$. Donc k est le rang de q.

.

Equivalence sur C. En posant $\tilde{x}_i = \sqrt{a_i} x_i$ on obtient la forme réduite: $q(x) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i^2$.

Corollaire. Deux formes quadratiques sur C sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

.

Formes quadratiques sur R. Signature.

On regroupe les coefficients positifs et négatif et on écrit
$q(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} a_i x_i^2$ avec $a_i > 0$, $i = 1, ..., k$ et $r + s = k$.

.

Théorème de Sylvester. Les entiers r et s (le nombre de carrés positif et négatifs) sont indépendants du choix de la base $q-$orthogonale.

.

Le couple (r, s) s'appelle **signature** de la forme quadratique.

On a $r + s = \text{rang}(q)$.

•• Démonstration.

Soit $q(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{k} a_i x_i^2$ et $q(x) = \sum_{i=1}^{r'} b_i y_i^2 - \sum_{i=r'+1}^{k} b_i y_i^2$ deux réductions en carrés, avec $a_i > 0$ et $b_i > 0$ dans les bases $(e_1, ..., e_n)$ et $(e'_1, ..., e'_n)$ respectivement.

Soit $E_+ = \text{Vect}(e_1, ..., e_r)$ et $E_- = \text{Vect}(e'_{r'+1}, ..., e'_n)$. Si $x \in E_+$, on a $q(x) > 0$ sauf si $x = 0$. Si $x \in E_-$, on a $q(x) \leq 0$. Donc $E_+ \cap E_- = \{0\}$. Par conséquent, $dim(E_+) + dim(E_-) \leq dim(E)$, donc $r + n - r' \leq n$, donc $r \leq r'$. Le même raisonnement donne $r' \leq r$, donc $r = r'$. ••

En posant $\tilde{x}_i = \sqrt{a_i} x_i$ on obtient la *forme réduite:*
$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{x}_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} \tilde{x}_i^2$.

.

Corollaire. Deux formes quadratiques sur R sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.

.

1.9. La forme quadratique q est dite **positive** si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ (donc, si $s = 0$).

La forme quadratique q est dite **définie positive** si $q(x) > 0$ pour tout x non-nul (donc, si $r = dim(E)$).

.

Lemme. *Caractérisation "intrinseque" de la signature.* r (respectivement, s) est égal à la dimension maximale d'un sous-espace F tel que la restriction de q (respectivement, de $-q$) sur F soit définie positive.

.

En termes matriciels, A est positive si ${}^tXAX \geq 0$ pour tout X; A est définie positive si ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \neq 0$.

Remarque: pour toute matrice C la matrice $A =^t CC$ est positive; ${}^tCC$ est définie positive si et seulement si C est inversible.

. .

1.10. Orthogonalisation de Gauss pour les formes définie positives.

Si $q_\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ est définie positive, on a $a_{ii} > 0$ pour tout i. Donc dans l'algorithme de Gauss on rencontre uniquement le cas 1 (voir **1.7.**). La matrice de changement de variables est à chaque étape triangulaire (supérieure); la matrice de passage P vers la base orthonormale dans laquelle q est la somme des carrés est donc triangulaire supérieure: ${}^tPAP = I_n$. Soit $C = P^{-1}$. On a $A =^t CC$.

.

Théorème de factorisation triangulaire (Gauss-Cholesky).

Pour toute matrice A symétrique définie positive il existe une unique matrice C triangulaire supérieure à diagonale positive telle que $A =^t CC$.

.

1.11. Exemple: étude des extréma. Soit $f(x_1, ..., x_n)$ une fonction de classe C^2 dans R^n. Soit $0 = (0, ..., 0)$ un point critique: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, $i = 1, ..., n$. On considère le développement limité de f en 0 à l'ordre 2:

$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} h_{i,j}x_ix_j + o(\| x \|^2)$, où $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$.

La forme quadratique $H(x) = \sum_{i,j} h_{i,j}x_ix_j$ est *la forme Hessienne* de f en 0.

Proposition. (i) Si f admet un minimum local en O, H admet un minimum en 0 et donc H est positive.

(ii) Si H admet un minimum strict en 0 et donc est définie positive, f admet un minimum local strict en 0.