1. Formes bilinéaires. Formes quadratiques.

.

1.1. Définitions. Soit E un espace vectoriel sur K ($K = R$ ou C).

Une **forme bilinéaire** sur E est une application $\varphi : E \times E \to K$ linéaire par rapport à chacune des deux variables.

Une forme bilinéaire φ est **symétrique** si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tout $x, y \in E$. Si $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ pour tous $x, y \in E$, la forme est dite **anti-symétrique** (ou **alternée**).

Chaque forme bilinéaire s'écrit comme la somme d'une forme symétrique et d'une forme anti-symétrique: $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, où

$\varphi_+(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) + \varphi(y, x))$ et $\varphi_-(x, y) = \frac{1}{2}(\varphi(x, y) - \varphi(y, x))$.

Pour une forme bilinéaire symétrique on définit la **forme quadratique associée** $q_\varphi : E \to K$: $q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$.

La forme bilinéaire symétrique est déterminée par la forme quadratique associée: $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}[q_\varphi(x + y) - q_\varphi(x - y)]$ (*"identité de polarisation"*).

.

Exemples. 1. Si f et g sont deux formes linéaires, $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire.

2. Si $\varphi_1, ..., \varphi_k$ sont des formes bilinéaires et $a_1, ...a_k$ des scalaires, $a_1\varphi_1 + ... + a_k\varphi_k$ est une forme bilinéaire.

3. Soit E l'espace des matrices $k \times n$; alors $\varphi(A, B) = tr({}^tAB)$ est une forme bilinéaire symétrique.

4. Soit $E = C([a, b], K)$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, soit $p \in C([a, b], K)$. Alors $\varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)p(t)dt$ est une forme bilinéaire symétrique.

.

1.2. Expression en coordonnées. On suppose que dim $E = n < \infty$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $x = \sum_1^n x_i e_i$, $y = \sum_1^n y_i e_i$.

Alors $\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$ où $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

La matrice $A = (a_{ij}) = (\varphi(e_i, e_j))$ est la *matrice de la forme bilinéaire* φ dans la base $\mathcal{B}$.

La forme φ est symétrique si et seulement si sa matrice (dans n'importe quelle base) est symétrique: $a_{ij} = a_{ji}$ ou ${}^tA = A$. Si φ est symétrique, la forme quadratique associée s'écrit: $q_\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$.

Soit X la colonne des composantes du vecteur x: ${}^tX = (x_1, ..., x_n)$. Alors on peut écrire φ à l'aide de la multiplication matricielle: $\varphi(x, y) ={}^t XAY$.

.

1.3. Changement de base (changement linéaire de coordonnées).

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une autre base de E, soit X' et Y' les colonnes des coordonnées des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}'$.

On a $X = PX'$ et $Y = PY'$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $\varphi(x,y) =^t XAY =^t X'^tPAPY' =^t X'A'Y'$ où $A' =^t PAP$ est la matrice de la forme φ dans la base $\mathcal{B}'$.

(Noter que si A est symétrique, A' l'est aussi.)

1.4. On appelle **rang** d'une forme bilinéaire le rang de sa matrice (il ne dépend pas du choix de la base). On dit que la forme est **non-dégénérée** si son rang est égal à la dimension de E.

Pour une forme φ symétrique son **noyau** est défini par
Ker $\varphi = \{x \in E : \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$.

Le noyau de φ est le noyau de (l'application linéaire définie par) la matrice de φ. On a: rang (φ) + dim (Ker φ) = dim (E).

Lemme. *Caractérisation du noyau en termes de la forme quadratique:*
$x \in$ Ker (φ) si et seulement si $q_\varphi(x+y) = q_\varphi(y)$ pour tout $y \in E$.

.

1.5. Equivalence des formes.

Deux formes bilinéaires φ et ψ sont dites **équivalentes** si il existe un isomorphisme $f : E \to E$ tel que $\psi(x,y) = \varphi(f(x), f(y))$.

Si $\dim(E) < \infty$, les formes φ et ψ sont équivalentes si leurs matrices A et B sont liées par $B =^t PAP$ avec P inversible (autrement dit, si on peut trouver deux bases dans lequelles φ et ψ ont la même matrice).

1.6. Soit φ une forme bilinéaire symetrique. Les vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $\varphi(x,y) = 0$. Une base est dite **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Dans une base orthogonale la forme s'écrit $\varphi(x,y) = \sum_1^n a_i x_i y_i$, et sa matrice est diagonale. La forme quadratique associée devient alors une combinaison linéaire de carrés: $q(x) = \sum_1^n a_i x_i^2$.

Le rang de φ (ou de q) est le nombre de coefficients a_i non-nuls. Le noyau de φ est engendré par les vecteurs de base e_i pour lesquels $a_i = 0$.

.

1.7. Orthogonalisation de Gauss (réduction en carrés).

L'orthogonalisation de Gauss permet de fabriquer une base orthogonale pour la forme quadratique $q_\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ par des changements de coordonnées successives.

Cas 1. Soit $a_{11} \neq 0$. On écrit
$q_\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j =$
$a_{11}(x_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j)^2 + \sum_{i,j=2}^n a_{ij} x_i x_j - (\frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j)^2$
$= a_{11} y_1^2 + q_1(x_2, ..., x_n)$, où $y = x_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j$.
Ensuite il reste à diagonaliser la forme $q_1(x_2, ..., x_n)$ (récurrence).

Cas 2. Soit $a_{11} = 0$. Soit $a_{1j} \neq 0$ et $a_{jj} = 0$ (si $a_{jj} \neq 0$, on est dans le cas 1 avec j à la place de 1). Pour simplifier, soit $j = 2$.

On écrit

$q_\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j = a_{12}(x_1 + \frac{1}{a_{12}}\sum_{j=3}^n a_{2j}x_j)(x_2 + \frac{1}{a_{12}}\sum_{j=3}^n a_{1j}x_j)$
$+\sum_{i,j=3}^n a_{ij}x_ix_j - \frac{1}{a_{12}}(\sum_{j=3}^n a_{1j}x_j)(\sum_{j=3}^n a_{2j}x_j)$
$= a_{12}y_1y_2 + q_2(x_3, ..., x_n)$.

Ensuite on pose $z_1 = y_1 + y_2$, $z_2 = y_1 - y_2$ et on a $y_1y_2 = \frac{1}{4}(z_1^2 - z_2^2)$.

Après cela il reste à diagonaliser la forme $q_2(x_3, ..., x_n)$.

.

1.8. Equivalence des formes quadratiques.

Deux formes quadratiques sont **équivalentes** si les formes bilinéaires symétriques associées sont équivalentes; en d'autres termes, q_1 et q_2 sont équivalentes si il existe un isomorphisme $f : E \to E$ tel que $q_2(x) = q_1(f(x))$.

Pour une forme réduit en carrés on écrit

$q(x) = \sum_{i=1}^k a_ix_i^2$ avec $a_i \neq 0$, $i = 1, ..., k$. Donc k est le rang de q.

Equivalence sur C. En posant $\tilde{x}_i = \sqrt{a_i}x_i$ on obtient la forme réduite: $q(x) = \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i^2$.

Corollaire. Deux formes quadratiques sur C sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Formes quadratiques sur R. Signature.

On regroupe les coefficients positifs et négatif et on écrit

$q(x) = \sum_{i=1}^r a_ix_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} a_iy_i^2$ avec $a_i > 0$, $i = 1, ..., k$.

.

Théorème de Sylvester. Les entiers r et s (le nombre de carrés positif et négatifs) sont indépendants du choix de la base $q-$orthogonale.

Le couple (r, s) s'appelle **signature** de la forme quadratique.

On a $r + s = \text{rang}(q)$.

En posant $\tilde{x}_i = \sqrt{a_i}x_i$ on obtient la *forme réduite:* $q(x) = \sum_{i=1}^r \tilde{x}_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} \tilde{x}_i^2$.

Corollaire. Deux formes quadratiques sur R sont équivalentes si et seulement si elles ont la même signature.

Lemme. *Caractérisation "intrinseque" de la signature.* r (respectivement, s) est égal à la dimension maximale d'un sous-espace F tel que la restriction de q (respectivement, de $-q$) sur F soit définie positive.

.

1.9. La forme quadratique q est dite **positive** si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ (donc, si $s = 0$).

La forme quadratique q est dite **définie positive** si $q(x) > 0$ pour tout x non-nul (donc, si $r = dim(E)$).

En termes matriciels, A est positive si ${}^tXAX \geq 0$ pour tout X; A est définie positive si ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \neq 0$.

Remarque: pour toute matrice C la matrice $A ={}^t CC$ est positive; ${}^tCC$ est définie positive si et seulement si C est inversible.

.

Exemple: étude des extréma. Soit $f(x_1, ..., x_n)$ une fonction de classe C^2 dans R^n. Soit $0 = (0, ..., 0)$ un point critique: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, $i = 1, ..., n$. On considère le dévéloppement limité de f en 0 à l'ordre 2:

$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} h_{i,j}x_ix_j + o(\| x \|^2)$, où $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$.

La forme quadratique $H(x) = \sum_{i,j} h_{i,j}x_ix_j$ s'appelle la forme Hessienne de f en 0.

Proposition. (i) Si f admet un minimum local en O, H admet un minimum en 0 et donc H est positive.

(ii) Si H admet un minimum strict en 0 et donc est définie positive, f admet un minimum local strict en 0.

.

1.10. Orthogonalisation de Gauss pour les formes définie positives.

Si $q_\varphi(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$ est définie positive, on a $a_{ii} > 0$ pour tout i. Donc dans l'algorithme de Gauss on rencontre uniquement le cas 1 (voir **1.7.**). La matrice de changement de variables est à chaque étape triangulaire (supérieure); la matrice de passage P vers la base orthonormale dans laquelle q est la somme des carrés est donc triangulaire supérieure: ${}^tPAP = I_n$. Soit $C = P^{-1}$. On a $A ={}^t CC$.

Théorème de factorisation triangulaire (Gauss-Cholesky).

Pour toute matrice A symétrique définie positive il existe une unique matrice C triangulaire supérieure à diagonale positive telle que $A ={}^t CC$.

.

2. Produit scalaire. Espaces Euclidiens.

2.1. Soit E un R-espace vectoriel. Un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive, noté $< .,. >$.

La **norme euclidienne** associée est définie par $\| x \|^2 =< x, x >$.

L'inégalité de Cauchy-Schwartz $| < x, y > | \leq \| x \| \| y \|$ entraine l'inégalité du triangle $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

La distance euclidienne d sur E est définie par $d(x, y) =\| x - y \|$.

Le produit scalaire est déterminé par la norme:

$< x, y >= \frac{1}{4}(\| x + y \| - \| x - y \|)$ ("identité de polarisation").

Exemples: 1. Produit scalaire canonique dans R^n: $< x, y >= \sum_1^n x_iy_i$; la norme est donnée par le "théorème de Pythagore": $\| x \|^2 = \sum_1^n x_i^2$.

2. $E = C([a,b], R)$, $< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Un R-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire s'appelle **espace euclidien**.

2.2. Deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $< x, y >= 0$.

Sous-espace orthogonale. Soit $A \subset E$; **l'orthogonal** de A est l'ensemble de vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A:

$A^{\perp} = \{x \in E : \forall y \in A$ on a $< x, y >= 0\}$.

Il est claire que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Deux sous-espaces E_1 et E_2 sont **orthogonaux** si tout vecteur de E_1 est orthogonal à tout vecteur de E_2 ($E_2 \subset E_1^{\perp}$).

Famille orthogonale. Une famille de vecteurs de E est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs de E est dite **orthonormale** si elle est orthogonales et tous ses vecteurs sont de norme 1.

Lemme. Une famille orthogonale sans vecteurs nuls est libre.

Exemple. Dans $C([0, 2\pi])$ avec le produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ la famille $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos nx, \sin nx)_{n \geq 1}$ est orthonormale.

.

2.3. Coordonnées dans une base orthonormale.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale, soit $x = \sum_1^n x_i e_i$, $y = \sum_1^n y_i e_i$. Alors $< x, y >= \sum_1^n x_i y_i$, $\| x \|^2 = \sum_1^n x_i^2$ ("théorème de Pythagore") et $x_i =< x, e_i >$.

Coordonnées dans une base **orthogonale:** $< x, y >= \sum_1^n < e_i, e_i > x_i y_i$, $\| x \|^2 = \sum_1^n < e_i, e_i > x_i^2$ et $x_i = \frac{<x, e_i>}{<e_i, e_i>}$.

.

2.4. Orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Soit $(v_1, ..., v_n, ...)$ une famille libre dans E. On peut construire une famille orthonormale $e_1, ..., e_n, ...$ telle que $Vect(v_1, ..., v_k) = Vect(e_1, ..., e_k)$ pour tout $k \geq 1$. (Autrement dit, e_k est une combinaison linéaire de $v_1, ..., v_k$.)

Construction par récurrence:

On pose $e_1 = \frac{v_1}{\|v_i\|}$; $\tilde{e}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_1^k < v_{k+1}, e_i > e_i$ et $e_{k+1} = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\|\tilde{e}_{k+1}\|}$.

Corollaire. Tout espace Euclidien admet une base orthonormale. Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

.

2.5. Projection orthogonale.

Soit $F \subset E$ un sous-espace de dimention finie.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de F.

On définit $P_F : E \to E$ par $P_F(x) = \sum_1^n < x, e_i > e_i$. Alors P_F est un projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Corollaire. Si F est un sous-espace de dimension finie, $F^\perp$ est un supplémentaire de F: $E = F \bigoplus F^\perp$, somme directe orthogonale. On a aussi $(F^\perp)^\perp = F$.

Projection orthogonale dans une base quelconque.

Le vecteur $y = P_F(x)$ est caractérisé par les conditions $y \in F$ et $< y, z >=< x, z >$ pour tout vecteur z de F.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de F.

Posons $P_F(x) = \sum_1^n u_i e_i$; pour déterminer les coeeficients u_i on doit résoudre le système:

$\sum_1^n u_i < e_i, e_j >=< x, e_j >, j = 1, ..., n.$

La matrice de ce système $G = (< e_i, e_j >)$ s'appelle *matrice de Gram.* Si $(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)$ est une base orthonormale et $A = (a_{ij}) = (< \tilde{e}_i, e_j >)$, alors $G =^t AA$. En particulier, dét G= (dét $A)^2$.

.

2.6. Projection othogonale et meilleur approximation en moyenne quadratique. Distance à un sous-espace.

Lemme. Soit F est un sous-espace de dimension finie et $x \in E$. Alors la projection $P_F(x)$ réalise la distance minimale entre x et les vecteurs de F: $\| x - P_F(x) \| = \min \{\| x - z \|, z \in F\}$.

Exemple. Ajustement affine.

Soit $x_1 < x_2 < ... < x_n$ et $S = (x_1, ..., x_n)$.

Soit E l'espace des fonctions définies sur S à valeurs réelles.

Le produit scalaire dans E est défini par $< f, g >= \sum_1^n f(x_i)g(x_i)$;

Etant donné f, *l'ajustement affine par les moindres carrés* consite à déterminer une fonction affine $\phi(x) = ax + b$ telle que l'écart $\| f - \phi \|^2= \sum_1^n [f(x_i) - \phi(x_i)]^2$ soit minimal.

La réponse est donnée par la projection orthogonal sur le sous-espace des fonctions affines. Les coefficients a et b sont les solutions du système linéaire: $< \phi, 1 >=< f, 1 >$, $< \phi, x >=< f, x >$. Plus explicitement,

$na + (\sum x_i)b = \sum f(x_i),$

$(\sum x_i)a + (\sum x_i^2)b = \sum x_i f(x_i).$

Exemple. Meilleur approximation en moyenne quadratique par des polynômes trigonométriques.

Un polynôme trigonométrique de dégré $\leq n$ est la somme $p(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$. Soit $f \in C([0, 2\pi])$ une fonctionn continue. On cherche on polynôme trigonométrique p de degré $\leq n$ tel que l'écart $\int_0^{2\pi} (f(t) - p(t))^2 dt$ soit minimal.

La réponse est donnée par la projection orthogonal dans $C([0,2\pi])$ sur le sous-espace des polynômes trigonométriques de dégré $\leq n$; le produit scalaire est $< f,g >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. Les coefficients du polynôme $p(t)$ sont: $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt$.

.

2.7. Inégalité de Bessel et égalité de Bessel-Parseval.

Théorème. Soit $(e_1,...,e_n,...)$ une famille orthonormale et $x \in E$. Alors

(i) pour tout n on a $\sum i = 1^n < x, e_i >^2 \leq \| x \|^2$.

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} < x, e_i >^2 = \| x \|^2$ si et seulement si x appartient à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par la suite $(e_1,...,e_n,...)$.

Exemple: séries de Fourier. Avec le produit scalaire $< f,g >= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ dans $C([0,2\pi])$ la famille $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos nt, \sin nt)_{n\geq 1}$ est orthonormale; les combinaisons linéaires des ses fonctions - les polynômes trigonométriques - sont denses dans $C([0,2\pi])$. Soit $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$. On a l'égalité de Parseval:

$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

.

Egalité de Bessel-Parseval dans une "base" orthogonale.

Si $(e_1,...,e_n,...)$ est une famille orthogonale et x appartient à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par la suite $(e_1,...,e_n,...)$, alors

$\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<x,e_i>^2}{<e_i,e_i>}$.

.

3. Formes bilinéaires et endomorphismes.

3.1. Soit E un espace Euclidien et $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$ une base orthonormale.

Soit $f \in L(E)$, $f(e_j) = \sum_i a_{i,j}e_i$ et $A = (a_{ij})$ la matrice de f.

On définit la forme associée: $\varphi_f(x,y) =< x, f(y) >$. La matrice de φ_f dans la base B est: $(< e_i, f(e_j) >) = (a_{ij}) = A$. La correspondance entre f et φ_f est donc une bijection linéaire entre l'espace des endomorphismes et l'espace des formes bilinéaires.

Si on écrit $\psi_f(x,y) =< f(x), y >$, alors la matrice de ψ_f est la transposée de A: $< f(e_i), e_j >= a_{ji}$. Il existe donc un unique endomorphisme f^* tel que $< x, f(y) >=< f^*(x), y >$ pour tous $x, y \in E$.

Définition. L'endomorphisme f^* tel que $< x, f(y) >=< f^*(x), y >$ s'appelle **l'adjoint** de f; sa matrice dans une base orthonormale est la transposée de la matrice de f.

Définition. L'endomorphisme f est dit **auto-adjoint** ou **symétrique** si $f^* = f$. L'endomorphisme f est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

Exemple. Une projection orthogonale est symétrique.

3.2. *Propriétés de f^*.* L'application $f \to f^*$ est linéaire; $(f^*)^* = f$, $(fg)^* = g^* f^*$ et $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

Lemme. (1) Ker $f^* =$ (Im $f)^\perp$ et Im $f^* =$(Ker $f)^\perp$.

(2) L'orthogonal d'un sous-espace stable par f est stable par f^*.

Corollaire. Si f est symétrique, Ker $f =$ (Im $f)^\perp$ et E est la somme orthogonale de Ker f et Im f. L'orthogonal d'un sous-espace stable par f est stable par f.

.

3.3. Diagonalisation des matrices symétriques.

Proposition. Soit f un endomorphisme auto-adjoint. Alors

(i) Toutes les valeurs propres de f sont réelles.

(ii) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

(iii) f est diagonalisable dans une base orthonormale.

.

Caractérisation min-max des valeurs propres (Rayleigh). Soit f un endomorphisme auto-adjoint.

On définit la fonction $Q(x) = \frac{<x,f(x)>}{<x,x>}$ dans $E - \{0\}$. Alors

(i) Les points critiques de Q sont précisement les vecteurs propres de f.

(ii) max $\{Q(x), x \in E - \{0\}\}$ (respectivement, min $\{Q(x), x \in E - \{0\}\}$) est égal à la valeur propre maximale (respectivement, minimale) de f.

.

3.4. Un endomorphisme symétrique f est dit **positif** (respectivement, **défini positif**) si la forme associée $< x, f(y) >$ est positive (respectivement, défini positive).

La proposition précédente montre que'un endomorphisme symétrique est positif (respectivement, défini positive) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement, stictement positives).

Une matrice symétrique A est dit **positive** (respectivement, **défini positive**) si ${}^tXAX \geq 0$ pour tout $X \in R^n$ (respectivement, ${}^tXAX > 0$ pour tout X non-nul).

Exemple: racine carré d'une matice positive. Soit f un endomorphisme positif, Π_i le projecteur spectral associé à la valeur propre λ_i, $i = 1, ..., k$. On a $f = \sum \lambda_i \Pi_i$. Posons $g = \sum \sqrt{\lambda_i} \Pi_i$. Alors g est symétrique positif et $g^2 = f$. On peut montrer qu'une telle racine carré positive $\sqrt{f} = g$ est unique.

3.5. Diagonalisation d'une forme quadratique dans une base orthonormale.

Soit q une forme quadratique et soit f un endomorphisme auto-adjoint tel que $q(x) =< x, f(x) >$. On a vu que dans une base orthonormale q et f

ont la même matrice. Donc dans une base orthonormale de vecteurs propres de f la matrice de q est diagonale et q est une combinaison linéaire de carrés.

Proposition. *"Réduction aux axes principaux".* Pour toute forme quadratique q il existe une une base orthonormale dans laquelle la matrice de q est diagonale et q est une combinaison linéaire de carrés: $q(x) = \sum_1^n a_i x_i^2$. Les coefficients a_i sont les valeurs propres de l'endomorphisme auto-adjoint f associé ($q(x) =< x, f(x) >$).

On peut reformuler ce résultat comme la *diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques:* la forme q et le produit scalaire $< x, x >$.

.

4. Transformations orthogonales.

4.1. Soit E un espace Euclidien.

Un endomorphisme U de E est **orthogonal** (est une isométrie linéaire) si U préserve le produit scalaire: $< Ux, Uy >=< x, y >$ pour tout $x, y \in E$.

Proposition. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) U est orthogonal.

(ii) U préserve la norme: $\| Ux \|=\| x \|$ pour tout $x \in E$.

(iii) U transforme une base orthonormale en base orthonormale.

(iv) U transforme toute base orthonormale en base orthonormale.

Un endomorphisme orthogonal est injectif, donc inversible
(dim $E < \infty$!). Son inverse est aussi orthogonal.

4.2. L'égalité $< Ux, Uy >=< x, y >$ s'écrit aussi
$< U^*Ux, y >=< x, y >$ ce qui est équivalent à $U^*U = I_n$. Donc U est orthogonal si et seulement si $U^*U = I_n$, uo encore ssi $U^{-1} = U^*$.

Une **matrice orthogonale** est la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base orthonormale. Une matrice orthogonale A est caractérisée par la relation ${}^tAA = A^tA = I_n$ qui signifie que les colonnes de A (aussi que ses lignes) constituent une base orthonormale par rapport au produit scalaire canonique dans R^n.

.

4.3. *Transformations orthogonales et diagonalisation d'une forme quadratique dans une base orthonormale.*

Soit A la matrice d'une forme quadratique q dans une base $\mathcal{B}$; soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à une autre base $\mathcal{B}'$. Alors la matrice de la forme q dans la base $\mathcal{B}'$ est $A' =^t PAP$. Si les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormales, P est orthogonale: ${}^tP = P^{-1}$ et on a $A' =^t PAP = P^{-1}AP$. Donc la matrice d'une forme se transforme comme la matrice d'un endomorphisme si le changement de coordonnées est orthogonal. Cela montre encore une fois que la diagonalisation d'une forme quadratique par une transformation orthogonale demande la recherche des valeurs et des vecteurs propres de A.

4.4. Symétrie par rapport à un sous-espace. Réflexions.

Soit F un sous-espace de E et $E = F \bigoplus F^{\perp}$ la décomposition orthogonale. Pour $x \in E$ on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$. La **symétrie** s_F par rapport à F est définie par $s_F(x) = x_1 - x_2$. Une symétrie par rapport à un hyperplan s'appelle **réflexion**.

Proposition. Toute transformation orthogonale dans R^n s'écrit comme un produit d'au plus n réflexions.

4.5. Réduction des endomorphismes orthogonals.

Proposition. Soit U un endomorphisme orthogonal.

(i) Si le sous-espace F est stable par U, alors $F^{\perp}$ est stable par U.

(ii) Toute valeur propre de U est de module 1.

(iii) E se décompose en somme orthogonale des sous-espaces stables par U de dimension 1 ou 2.

Transformations orthogonales en petite dimension.

Dimension 1. $Ux = x$ ou $Ux = -x$.

Dimension 2. a) dét $U > 0$: U est une rotation.

b) dét $U < 0$: U est une réflexion.

Dimension 3. a) dét $U > 0$: U est une rotation autour d'un axe.

b) dét $U < 0$: U est une réflexion composée avec une rotation autour d'un axe orthogonal au plan de réflexion.

Remarquer qu'il y a (au moins) une valeur propre réelle.

4.6. Décompositon polaire.

Théorème. Soit f un endomorphisme inversible. Il existe l'unique endomorphisme orthogonal U et l'unique endomorphisme défini positif S tels que $f = US$.

Construction: On pose $S = \sqrt{f^* f}$; S est défini positif. On définit U par $U = fS^{-1}$ et on vérifie que U est orthogonal.

4.7. Orthogonalisation de Gram-Schmidt et la décomposition orthogonale-triangulaire (décomposition QR).

Théorème. Soit A une matrice inversible. Il existe l'unique matrice orthogonale Q et l'unique matrice triangulaire supérieure R avec une diagonale positive telles que $A = QR$.

Construction: Soit $v_1, ..., v_n$ les colonnes de A. Par l'orthogonalisation de Gram-Schmidt on construit une famille orthonormale dans R^n, $e_1, ..., e_n$ telle que e_k est une combinaison linéaire de $v_1, ..., v_k$ pour tout $k \geq 1$. Donc $v_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik} e_i$ (et $r_{k,k} > 0$). Posons $r_{ik} = 0$ si $i > k$.

Soit Q la matrice constituée de colonnes $e_1, ..., e_n$ et $R = (r_{ik})$. Alors Q est orthogonale, R est triangulaire supérieure et la relation $v_k = \sum_{i=1}^{k} r_{ik} e_i$ devient $A = QR$.