

Chapitre 6

Calcul différentiel

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , E, F, G sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimensions finies non nulles (on notera généralement $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$), U désigne un ouvert de E et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

6.2 Dérivées partielles

La différentielle est une application compliquée. Par la notion de dérivée partielle, nous allons accéder simplement à ses valeurs.

6.2.1 Dérivation selon un vecteur

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $a \in U$. Puisque U est un ouvert de E , il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Pour $v \in E$ fixé, la fonction

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + tv)$$

est définie au voisinage de 0. Elle étudie les valeurs prises par f sur la droite affine $a + \text{Vect}(v)$ (lorsque $v \neq 0_E$).

Définition 1. Soient $f : U \subset E \rightarrow F$, $a \in U$ et $v \in E$. On dit que f est **dérivable selon le vecteur** v en a (ou admet une dérivée directionnelle suivant v en a) si la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0.

On appelle alors dérivée selon le vecteur v de f en a la valeur de cette dérivée, notée

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + tv) - f(a)).$$

Remarque. Si $v = 0_E$, la dérivée de f selon le vecteur v en a existe toujours et vaut $D_{0_E} f(a) = 0_F$. En effet,

$$\frac{1}{t} (f(a + t0_E) - f(a)) = \frac{1}{t} (f(a) - f(a)) = 0_F \xrightarrow[t \neq 0]{} 0_F.$$

Théorème 1. Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et on a

$$D_v f(a) = df(a)(v).$$

Démonstration. Comme f est différentiable en a , il existe une fonction ε définie au voisinage de 0_E telle que

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F.$$

Soit $v \in E$ fixé. On a alors lorsque $t \in \mathbb{R}$ tend vers 0,

$$f(a+tv) = f(a) + df(a)(tv) + \|tv\|\varepsilon(tv) = f(a) + t df(a)(v) + o(t)$$

par linéarité de $df(a)$. On obtient donc

$$\frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)) = \frac{1}{t}(t df(a)(v) + o(t)) = df(a)(v) + o(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} df(a)(v)$$

ce qui montre que f admet une dérivée directionnelle selon le vecteur v en a , et que celle-ci vaut $D_v f(a) = df(a)(v)$. \square

Remarque. Ceci montre que si f est différentiable en a , la différentielle en a au point $h \in E$ vaut

$$df(a)(h) = D_h f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f(a+th) - f(a)).$$

ce qui nous donne un candidat potentiel pour la différentielle.

Exemple : Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La fonction f admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur au point $a = (0, 0)$ données par :

$$D_v f(0, 0) = \begin{cases} \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2} & \text{si } v = (v_1, v_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } v = (0, 0). \end{cases}$$

Supposons que f soit différentiable en $(0, 0)$, alors pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, $(h, k) \neq (0, 0)$, on a

$$df(0, 0)(h, k) = D_{(h, k)} f(0, 0) = \frac{h^3}{h^2 + k^2}$$

ce qui est absurde car cette fonction n'est pas linéaire en (h, k) . En effet, on aurait alors

$$df(0, 0)(1, 1) = \frac{1}{2} \neq df(0, 0)(1, 0) + df(0, 0)(0, 1) = 1 + 0 = 1.$$

Par suite, f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Remarque. L'existence des dérivées directionnelles selon tout vecteur de E en un point a , ne suffit pas pour démontrer la différentiabilité d'une fonction en ce point. Cela ne suffit même pas pour la continuité au point.

Exemple : Considérons $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^3}{y}$ si $y \neq 0$, et par $f(x, 0) = 0$. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Étudions l'existence de la dérivée selon le vecteur v de f en $(0, 0)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, on a

$$\frac{1}{t}(f((0, 0) + tv) - f(0, 0)) = \frac{1}{t}f(tv_1, tv_2).$$

Si $v_2 \neq 0$, on a alors

$$\frac{1}{t}f(tv_1, tv_2) = \frac{1}{t} \frac{t^3 v_1^3}{t v_2} = t \frac{v_1^3}{v_2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

et si $v_2 = 0$, alors $\frac{1}{t}f(tv_1, tv_2) = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Ainsi, f admet une dérivée selon tout vecteur v en $(0, 0)$ et $D_v f(0, 0) = 0$. Cependant f n'est pas continue en $(0, 0)$ (et a fortiori pas différentiable en $(0, 0)$) car $f(1/n, 1/n^3) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq f(0, 0)$ alors que $(1/n, 1/n^3) \rightarrow (0, 0)$.

6.2.2 Dérivées partielles

Dans \mathbb{R}^n , certains vecteurs (ceux de la base canonique) donnent des directions privilégiées par rapport aux autres vecteurs. Ceci avait donné lieu à la définition des dérivées partielles d'une fonction. On va chercher à définir des notions semblables, en se plaçant cette fois dans une base \mathcal{B} de E .

Choisissons arbitrairement une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Soit $f : U \subset E \rightarrow F$.

Définition 2. Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On dit que f admet une i -ième dérivée partielle (dans la base \mathcal{B}) en $a \in U$ si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur e_i en a . On note alors

$$\partial_i f(a) = D_{e_i} f(a) = \lim_{t \xrightarrow{\neq} 0} \frac{1}{t}(f(a + te_i) - f(a)).$$

Remarque. Pour une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, on retrouve la définition des dérivées partielles (premières) de f en prenant pour \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^n .

Définition 3. Sous réserve d'existence, l'application $\partial_i f : U \subset E \rightarrow F$ est appelée i -ième dérivée partielle de f (dans la base \mathcal{B}).

Théorème 2. Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est différentiable, alors les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ existent et pour tout $a \in U$, on a :

$$\partial_i f(a) = df(a)(e_i).$$

De plus, pour tout $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \in E$ (avec $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$),

$$df(a)(h) = D_h f(a) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a).$$

Démonstration. Si f est différentiable, alors pour tout $a \in U$ et tout $h \in E$, f est dérivable selon le vecteur h en a et

$$D_h f(a) = \mathrm{d}f(a)(h).$$

En particulier pour $h = e_i$, on obtient

$$\partial_i f(a) = D_{e_i} f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_i).$$

De plus, si $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$ avec $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(a)(h) &= \mathrm{d}f(a) \left(\sum_{i=1}^n h_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \mathrm{d}f(a)(e_i) \quad \text{par linéarité de } \mathrm{d}f(a) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1. Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est différentiable en $a \in U$, le développement limité à l'ordre 1 de f en a s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) + o(\|h\|) \quad \text{quand } h \rightarrow 0_E.$$

Remarque. Sous l'hypothèse “ f est différentiable en a ”, les dérivées partielles de f permettent de calculer la différentielle de f en a . Il reste à savoir calculer les dérivées partielles de f (techniques que l'on a déjà vues au S3 pour les fonctions de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p).

6.2.3 Dérivées partielles d'une fonction de n variables réelles

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$ donnée par

$$f : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n).$$

On étudie les dérivées partielles de f dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n .

Rappelons que pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on peut définir la i -ième application partielle de f au point a par :

$$f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Proposition 1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$, $a \in U$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a équivalence entre :

(i). f admet une i -ième dérivée partielle en a (dans la base canonique),

(ii). la i -ième application partielle de f au point a , notée $f_{a,i}$, est dérivable en a_i .

Dans ce cas, on a

$$\partial_i f(a) = f'_{a,i}(a_i) = \frac{d}{dt}(f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n))|_{t=a_i}.$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(f(a + te_i) - f(a)) &= \frac{1}{t}(f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)) \\ &= \frac{1}{t}(f_{a,i}(a_i + t) - f_{a,i}(a_i)) \end{aligned}$$

ainsi f admet une dérivée partielle $\partial_i f(a)$ si et seulement si $f_{a,i}$ est dérivable en a_i . Dans ce cas, $\partial_i f(a)$ apparaît bien comme la dérivée en $t = a_i$ de la fonction $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$. \square

Remarque. On a déjà vu que si l'on convient de noter x_1, \dots, x_n les éléments du n -uplet x , il est usuel de noter $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ la i -ième dérivée partielle de f .

6.2.4 Dérivées partielles d'une fonction d'une variable vectorielle

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $x \in U$, convenons de noter $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} . On a alors $f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$. On peut alors identifier f avec la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \quad \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow F \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n). \end{aligned}$$

Proposition 2. Avec les notations précédentes, pour $a \in U$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a équivalence entre :

(i). f admet une i -ième dérivée partielle dans la base \mathcal{B} en a ,

(ii). \tilde{f} admet une i -ième dérivée partielle en (a_1, \dots, a_n) (dans la base canonique de \mathbb{R}^n).

Dans ce cas, on a

$$\partial_i f(a) = \partial_i \tilde{f}(a_1, \dots, a_n) = \frac{d}{dt}(\tilde{f}(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n))|_{t=a_i}$$

(où $a = \sum_{k=1}^n a_k e_k$).

Démonstration. Comme précédemment, cela résulte juste de l'écriture pour $t \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(f(a + te_i) - f(a)) &= \frac{1}{t}(f(a_1 e_1 + \dots + a_{i-1} e_{i-1} + (a_i + t)e_i + a_{i+1} e_{i+1} + \dots + a_n e_n) - f(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n)) \\ &= \frac{1}{t}(\tilde{f}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - \tilde{f}(a_1, \dots, a_n)). \end{aligned}$$

\square

Remarque. Si l'on a convenu de noter (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} , il est aussi usuel de noter les dérivées partielles de f dans la base \mathcal{B} ,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Proposition 3. Soit $f : U \subset E \rightarrow F$, $a \in U$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a équivalence entre :

- (i). f admet une i -ième dérivée partielle en a dans la base \mathcal{B} de E ,
- (ii). les fonctions coordonnées de f dans une base de F admettent une i -ième dérivée partielle en a dans la base \mathcal{B} .

Dans ce cas, on a

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad (\partial_i f)_k = \partial_i(f_k)$$

où l'on a noté f_k et $(\partial_i f)_k$ les fonctions coordonnées de f et $\partial_i f$ dans une base donnée de F .

Démonstration. Provient de la dérivation des applications partielles et des propriétés vues sur les limites pour les fonctions vectorielles. \square

Exemples :

1. Soit $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{z}$ (où \mathbb{C} est vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2). On cherche à déterminer les dérivées partielles de f (si elles existent) dans la base $(1, i)$ en $z = x + iy$. On peut identifier l'application f avec l'application

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{1}{x + iy}. \end{aligned}$$

Cette application est l'inverse d'une fonction polynomiale dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, donc elle admet des dérivées partielles premières. Ainsi, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, on obtient

$$\partial_1 f(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -\frac{1}{(x + iy)^2} = -\frac{1}{z^2}$$

et

$$\partial_2 f(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(z) = -\frac{i}{(x + iy)^2} = -\frac{i}{z^2}.$$

2. Soit $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $g(M) = M^2$. Déterminons, si elles existent, les dérivées partielles de g en $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'application g s'identifie à l'application

$$\tilde{g} : (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & cb + d^2 \end{pmatrix}.$$

Puisque chacune des fonctions coordonnées de \tilde{g} dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet des dérivées partielles premières (car elles sont polynomiales), g admet des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial a}(M) = \begin{pmatrix} 2a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial b}(M) = \begin{pmatrix} c & a + d \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial c}(M) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a + d & b \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial d}(M) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 2d \end{pmatrix}.$$

6.2.5 Matrice Jacobienne

Définition 4. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F . Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ différentiable en $a \in U$. On appelle **matrice Jacobienne** de f en a la matrice de l'application linéaire $df(a)$ relatives aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' :

$$\text{Jac}_f(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(df(a)) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Théorème 3. Avec les mêmes notations, notons f_1, \dots, f_p les fonctions coordonnées de f dans la base \mathcal{B}' , alors

$$\text{Jac}_f(a) = (\partial_j f_i(a))_{i \in \llbracket 1;p \rrbracket, j \in \llbracket 1;n \rrbracket} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \cdots & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. La j -ième colonne de la matrice $\text{Jac}_f(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(df(a))$ est formée par le vecteur colonne des coordonnées dans la base \mathcal{B}' de $df(a)(e_j)$. Or

$$df(a)(e_j) = \sum_{k=1}^p df_k(a)(e_j)e'_k = \sum_{k=1}^p \partial_j(f_k)(a)e'_k$$

ce qui donne la matrice voulue. Si l'on préfère, on peut aussi écrire

$$df(a)(e_j) = \partial_j f(a) = \sum_{k=1}^n \partial_j(f_k)(a)e'_k$$

en utilisant le résultat sur les dérivées partielles des fonctions coordonnées. \square

Remarque. Si l'on convient de noter (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} , on peut aussi écrire

$$\text{Jac}_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i \in \llbracket 1;p \rrbracket, j \in \llbracket 1;n \rrbracket} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Remarque. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, l'usage veut que l'on travaille relativement aux bases canoniques pour définir la matrice Jacobienne. On retrouve donc bien la définition vue au semestre précédent.

Remarque. La matrice Jacobienne caractérise entièrement la différentielle de f en a : si h a pour coordonnées (h_1, \dots, h_n) dans la base \mathcal{B} , alors le vecteur coordonnées de $df(a)(h)$ dans la base \mathcal{B}' est donné par

$$\text{Jac}_f(a) \times \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

On peut donc retrouver le développement limité de f en a à l'ordre 1 à partir de la matrice Jacobienne.

6.2.6 Dérivées partielles d'une fonction composée

Proposition 4 (Version matricielle du théorème de différentiation d'une composée).

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$, $g : V \subset F \rightarrow G$ où V est un ouvert de F vérifiant $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\text{Jac}_{g \circ f}(a) = \text{Jac}_g(f(a)) \times \text{Jac}_f(a)$$

(où les matrices Jacobiennes ont été prises dans des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ respectives de E, F et G).

Démonstration. On sait d'après le théorème de différentiation d'une composée que $g \circ f$ est différentiable en a , et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$ d'où

$$\begin{aligned} \text{Jac}_{g \circ f}(a) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(d(g \circ f)(a)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(dg(f(a)) \circ df(a)) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(dg(f(a))) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(df(a)) \\ &= \text{Jac}_g(f(a)) \times \text{Jac}_f(a). \end{aligned}$$

□

Proposition 5 (Formule de dérivation en chaîne).

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$, $g : V \subset F \rightarrow G$ où V est un ouvert de F tel que $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors les dérivées partielles de $g \circ f$ en a dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E existent et sont données par

$$\partial_i(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^p \partial_i f_k(a) \partial_k g(f(a)) \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

où l'on a noté f_1, \dots, f_p les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ de F .

Démonstration. On sait d'après le théorème ?? que $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F . Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a alors

$$\begin{aligned} \partial_i(g \circ f)(a) &= d(g \circ f)(a)(e_i) \\ &= dg(f(a))(df(a)(e_i)) \\ &= dg(f(a))(\partial_i f(a)) \quad \text{où } \partial_i f(a) = \sum_{k=1}^p \partial_i f_k(a) e'_k \\ &= \sum_{k=1}^p \partial_i f_k(a) dg(f(a))(e'_k) \quad \text{par linéarité de } dg(f(a)) \\ &= \sum_{k=1}^p \partial_i f_k(a) \partial_k g(f(a)). \end{aligned}$$

On peut aussi la voir comme corollaire de la version matricielle ci-dessus. □

Remarque. Si l'on convient de noter x_1, \dots, x_n les coordonnées d'un vecteur générique $x \in E$ dans la base \mathcal{B} et y_1, \dots, y_p celles d'un vecteur générique $y \in F$ dans la base \mathcal{B}' , la formule précédente se réécrit sous la forme

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

6.3 Classe d'une fonction

6.3.1 Fonction de classe \mathcal{C}^1

Théorème 4. Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. On a équivalence entre :

- (i). f est différentiable et df est continue (sur U),
- (ii). les dérivées partielles de f dans une base de E existent et sont continues (sur U).

Démonstration.

- Supposons que f est différentiable et df est continue (sur U). Alors les dérivées partielles de f dans une base \mathcal{B} de E existent et sont données par

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \partial_i f(a) = df(a)(e_i) \quad \forall a \in U$$

Puisque l'application $a \in U \mapsto df(a)$ est continue, que l'application $\varphi : u \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto u(e_i)$ est linéaire au départ d'un espace vectoriel de dimension finie, on peut affirmer que $a \mapsto \partial_i f(a)$ est continue par opérations.

- Réciproquement, supposons que dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , les dérivées partielles de f existent et sont continues. On a vu au semestre précédent, qu'alors la fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point de U . Par conséquent, elle est différentiable. De plus, pour tout $h = \sum_{j=1}^n h_j e_j$, on a

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a).$$

Si l'on note

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad p_i : x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \mapsto x_i$$

on peut alors écrire

$$\forall a \in U, \quad df(a) = \sum_{i=1}^n p_i \partial_i f(a)$$

Par opérations sur les fonctions continues, df est donc continue. □

Définition 5. On dit qu'une fonction $f : U \subset E \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^1 (sur U) si ses dérivées partielles dans une base de E existent et sont continues (sur U).

Remarque. Cette notion ne dépend pas de la base choisie d'après le théorème précédent.

Proposition 6. Les fonctions de classe \mathcal{C}^1 sont différentiables donc continues.

Exemples :

1. Les fonctions constantes sont de classe \mathcal{C}^1 .
2. Les applications linéaires sont de classe \mathcal{C}^1 (on a vu qu'elles sont différentiables et que leur différentielle est constante, donc continue). En particulier, les applications

$$p_i : x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E \mapsto x_i$$

sont de classe \mathcal{C}^1 .

Contre-exemple : Attention, l'existence des dérivées partielles seules ne suffit pas ! Reprenons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Puisque $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est un ouvert, pour t proche de x , on a $f(t, y) = \frac{t^3}{t^2 + y^2}$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{t^3}{t^2 + y^2}$ est dérivable en x , donc f admet une dérivée partielle par rapport à x sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ donnée par :

$$\forall (x, y) \neq (0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

et de plus on a vu que $D_{(1,0)} f(0, 0)$ existe et vaut $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$. De même, f admet une dérivée partielle par rapport à y sur \mathbb{R}^2 donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Ces dérivées partielles ne sont pas continues :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, \frac{1}{n} \right) &= 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) &= -\frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{aligned}$$

et on a déjà vu que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$. Par contre elle est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (même continûment différentiable), puisque ses dérivées partielles existent et sont continues sur cet ouvert. On aurait d'ailleurs pu utiliser un argument de ce type sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en justifiant que sur cet **ouvert**, f est le quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas, pour justifier l'existence des dérivées partielles premières de f comme on le faisait au semestre précédent.

6.3.2 Dérivées partielles successives

Définition 6. Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et \mathcal{B} une base de E .

La fonction f est appelée dérivée partielle d'ordre 0 de f .

Pour $k \in \mathbb{N}$, et sous réserve d'existence, on appelle dérivées partielles d'ordre $k + 1$ de f les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre k de f (dans la base \mathcal{B}).

Remarque. Si l'on note x_1, \dots, x_n les coordonnées dans la base \mathcal{B} de la variable $x \in E$, on note

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \partial_{i_1}(\cdots(\partial_{i_k} f)\cdots).$$

Exemple : Reprenons l'application $f : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{1}{z}$. Considérons la base $\mathcal{B} = (1, i)$ de \mathbb{C} (en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel). Si l'on note $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a vu que f admet des dérivées partielles premières données par

$$\forall z = x + iy \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -\frac{1}{z^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = -\frac{i}{z^2}.$$

On peut alors identifier $\frac{\partial f}{\partial x}$ avec la fonction

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto -\frac{1}{(x + iy)^2}$$

qui admet des dérivées partielles premières (dans la base \mathcal{B}), de même avec $\frac{\partial f}{\partial y}$. Ainsi, f admet des dérivées partielles d'ordre 2 données par

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z) = \frac{2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(z) = \frac{2i}{z^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z) = -\frac{2}{z^3}.$$

6.3.3 Classe d'une fonction

Définition 7. Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $f : U \subset E \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^k (sur U) si ses dérivées partielles d'ordre k dans une base de E existent et sont continues (sur U). On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ si elle est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque. On peut montrer que cette définition ne dépend pas du choix de la base de E utilisée pour définir les dérivées partielles de f .

Exemples :

1. Les applications de classe \mathcal{C}^0 correspondent aux applications continues.
2. Les applications constantes sont de classe \mathcal{C}^∞ .
3. Les applications linéaires sont de classe \mathcal{C}^∞ . En effet, les dérivées partielles d'une application linéaire u sont constantes puisque si l'on prend $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , alors

$$\partial_i f(a) = df(a)(e_i) = f(e_i).$$

6.3.4 Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k

Se référer au cours du S3 dans lequel tous les résultats ont déjà été énoncés proprement. Globalement, on montre qu'une combinaison linéaire, un produit (lorsque cela a un sens, une composée de fonctions de classe \mathcal{C}^k est encore de classe \mathcal{C}^k . On montre aussi que f est de classe \mathcal{C}^k si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de F sont de classe \mathcal{C}^k .

6.3.5 Théorème de Schwarz

Théorème 5 (Théorème de Schwarz).

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Alors pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f)$$

où les dérivées partielles de f sont calculées relativement à une base de E .

On a déjà vu des exemples au S4, s'y référer aussi.