On considère des fonctions numériques, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d'une variable réelle. (La plupart des notions s'étendent cependant aux fonctions vectorielles de plusieurs variables.) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Elle *converge simplement* vers $f : D \to \mathbb{K}$ si, pour tout $x \in D$, la *suite numérique* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$:

$$\forall x \in D\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ (n \geq N \ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,).$$

De plus, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* sur $A \subset D$ si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in A\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ (n \geq N \ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,).$$

De façon équivalente : il existe $N_0 \in N$ tel que les fonctions $f_n - f$ soient bornées sur A pour $n \geq N_0$, et la suite numérique $(\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|)_{n\geq N_0}$ converge vers zéro. Ainsi, s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $(|f_n(x_n) - f(x_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas zéro, la convergence n'est pas uniforme sur A.
Critère de Cauchy uniforme Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ (ou $\mathbb{R}^p$) converge uniformément sur A si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in A\,,\ \forall p, q \ \in \mathbb{N}\,,\ (p \geq q \geq N \ \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon\,).$$

PASSAGES À LA LIMITE Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f on dit que f est sa *limite simple*. Si elle converge uniformément on dit que f est sa *limite uniforme*.

- La limite simple d'une suite de fonctions positives est positive.
- La limite simple d'une suite de fonctions à valeurs réelles *monotone* est monotone.
- La limite simple d'une suite de fonctions *convexe* est convexe.
- La limite uniforme d'une suite de fonctions *bornées* est bornée. (C'est faux pour la convergence simple.)
- La limite uniforme d'une suite de fonctions *continues* est continue. (C'est faux pour la convergence simple.)

INTERVERSION DE LIMITES Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f, si pour tout $n \geq N_0$ la fonction f_n a une limite $\ell_n \in \mathbb{K}$ en $a \in \overline{A}$, alors la suite numérique $(\ell_n)_{n\geq N_0}$ a une limite $\ell \in \mathbb{K}$, la fonction f a une limite en a et ces limites sont égales :

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

INTÉGRATION Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ *continues par morceaux* sur le *segment* $[a, b]$ *converge en moyenne* sur $[a, b]$ vers f continue par morceaux si la suite numérique $(\int_a^b |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro. Elle *converge en moyenne quadratique* sur $[a, b]$ si la suite numérique $(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro.

- Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux converge en moyenne quadratique sur $[a, b]$ vers une fonction f, elle converge aussi en moyenne sur $[a, b]$ vers$f$.
- Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f continue par morceaux converge en moyenne sur $[a, b]$. De plus, la suite numérique $(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues un *intervalle* I, converge uniformément sur tout segment de I vers f, alors pour tout $a \in I$, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *primitives* $F_n : x \in I \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge uniformément sur tout segment de I vers $F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème de convergence dominée Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, convergeant simplement vers f. Si de plus il existe une fonction continue par

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

morceaux $g : I \to \mathbb{R}^+$ telle que $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^+$ (ce qui est automatique si I est un segment, et demande que l'*intégrale généralisée* $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ converge sinon) et pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$, alors les fonctions f_n et f sont *absolument intégrables* sur I et la suite numérique $(\int_I f_n(x)\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_I f(x)\mathrm{d}x$.

DÉRIVATION Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *de classe $\mathscr{C}^1$* sur un intervalle I, convergeant simplement vers une fonction g et telle que la suite des fonctions dérivées $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f. Alors la suite (g_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ dont la *dérivée* est f.

APPROXIMATION Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme d'une suite de *fonctions en escalier* sur ce segment.
Théorème de Weierstrass Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de *fonctions polynomiales* sur ce segment.