Une *suite numérique* est une *fonction* de $\mathbb{N}$ (ou $\{n \in \mathbb{N}\,;n \geq n_0\}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour une *suite réelle* ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour une *suite complexe*. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\geq n_0}$) la suite de *terme général* u_n. L'ensemble des suites réelles, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}$-*espace vectoriel*. De même, l'ensemble des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{C}$-*espace vectoriel*. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ l'application

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (S_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\,, \end{array}$$

est un isomorphisme dont la réciproque est donnée par

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\,;\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ u_n = S_n - S_{n-1}\,,\ \ u_0 = S_0\,.$$

Étant donnée une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, son image $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par σ définit une *série numérique*, que l'on note $\sum u_n$. (On définit de façon analogue la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ associée à $(u_n)_{n\geq n_0}$.)

▷ Les nombres S_n sont appelés *sommes partielles* de la série $\sum u_n$.

▷ Le *terme général d'une série* $\sum u_n$ est u_n.

On dit qu'une série $\sum u_n$ est *convergente* si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge*. La *somme* d'une série numérique convergente $\sum u_n$ est le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \left(\text{ou} \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k \text{ pour la série } \sum_{n\geq n_0} u_n\right),$$

et le *reste d'ordre n* est le nombre $R_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p\,.$

• La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes d'une série convergente converge vers zéro.

• Le terme général d'une série convergente tend vers zéro. Le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers zéro ne suffit pas pour que $\sum u_n$ soit convergente (voir par exemple la série harmonique).

• Une *série télescopique* $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si c'est le cas, $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n) = \lim(v_n) - v_{n_0}$.

• L'ensemble des séries convergentes forme un espace vectoriel.

Une série non convergente est dite *divergente*. La *nature* d'une série est sa convergence ou sa divergence.

• La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. La nature de la somme de deux séries divergentes est indéterminée.

Séries à termes réels positifs Une série à termes positif converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est *majorée*.

Théorème de comparaison. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
Si l'une des conditions suivantes est satisfaite
• il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$,
• ou $u_n = O(v_n)$, en particulier si $u_n = o(v_n)$,
• (**comparaison logarithmique**) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_{n+1}/u_n \leq v_{n+1}/v_n$,
et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge, tandis que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

NB: Il faut savoir *définir* les notions en rouge et démontrer les énoncés en bleu.

Règle de d'Alembert : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle pour laquelle il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $u_n > 0$.

- S'il existe $a < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}/u_n \leq a$, en particulier si la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $a \geq 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}/u_n \geq a$, en particulier si la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Théorème de comparaison entre intégrales généralisées et séries Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue et *décroissante*. Alors l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et la *série* $\sum f(n)$ sont de même *nature*.

Séries de référence La *série harmonique* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Une *série de Riemann* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Une *série géométrique* $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.

La série $\displaystyle\sum \frac{a^n}{n!}$ converge quel que soit $a \in \mathbb{R}^+$, et en fait pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Critère de Cauchy Une série numérique $\sum u_n$ est convergente si et seulement si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \geq N\,,\ \forall p \in \mathbb{N}\,,\quad \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon\,.}$$

Séries absolument convergentes Une série numérique $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ converge. Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est <u>fausse</u>.

Comparaison des sommes partielles ou des restes Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels <u>positifs</u> et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum a_n$ <u>diverge</u> on compare les sommes partielles :

- Si $u_n = O(a_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)$. Si $u_n = o(a_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big)$. •
- Si $u_n \in \mathbb{R}^+$ (à partir d'un certain rang), et $u_n \sim a_n$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} a_k$. •

Si la série $\sum a_n$ <u>converge</u> on compare les restes :

- Si $u_n = O(a_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\Big)$. Si $u_n = o(a_n)$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\Big(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\Big)$. •
- Si $u_n \in \mathbb{R}^+$ (à partir d'un certain rang), et $u_n \sim a_n$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. •

Théorème des séries alternées. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle *monotone* et convergeant vers zéro. On note $u_n = (-1)^n v_n$. Alors la *série alternée* $\sum u_n$ converge. De plus, son reste R_n est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq u_{n+1}$ pour tout n.

Théorème d'Abel. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites numériques telles que la suite (A_n) des sommes partielles de $\sum a_n$ soit bornée, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro, et la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ converge. Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.