Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si l'on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions *sommes partielles* définies par $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ pour tout $x \in D$, on dit de la *série de fonctions* $\sum f_n$ qu'elle :

- *converge simplement* si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement ;
- *converge absolument* (simplement) si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement ;
- *converge uniformément* sur $A \subset D$ si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A ;
- *converge absolument uniformément* sur A si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge uniformément sur A ;
- *converge normalement* sur A si la *série numérique* $\sum \sup_{x\in A} |f_n(x)|$ converge.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers zéro. Si de plus $\sum f_n$ converge uniformément, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers zéro. (Les deux réciproques sont fausses.)

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement, alors elle converge uniformément sur A si et seulement si la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions *restes*, définies par $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, converge uniformément vers zéro.

Critère de Cauchy uniforme Une série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ converge uniformément sur $A \subset D$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in A\,,\ \forall n,p\ \in \mathbb{N}\,,\ n \geq N\ \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \varepsilon\,.$$

Toute série de fonctions normalement convergente est absolument uniformément convergente. Toute série de fonctions absolument uniformément convergente est uniformément convergente. (Les deux réciproques sont fausses.)

Théorème des séries de fonctions alternées Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $g_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telles que, pour tout $x \in A \subset D$, la suite numérique $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ soit *décroissante*. On suppose de plus que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers zéro. Alors la série fonctions $\sum(-1)^n g_n$ converge uniformément sur A.

PASSAGES À LA LIMITE SOUS LE SIGNE Σ

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *continues*. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout *compact* $K \subset U$, alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue.
- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ayant une limite ℓ_n en $a \in \overline{A}$ et telles que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $A \subset D$. Alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge, la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ a une limite en a et

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)\,.$$

INTERVERSION Σ ET $\int$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continues sur le segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors la série numérique $\sum \int_a^b f_n$ converge et

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)\,.$$

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

Dérivation sous le signe Σ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de *classe* $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, si la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n' .$$