Dans ce qui suit, I désigne un *intervalle* de $\mathbb{R}$ d'« extrémités » α et β ($\alpha = \inf I$ et $\beta = \sup I$, avec la convention que $\inf A = -\infty$, respectivement $\sup A = +\infty$, si A est une partie non *minorée*, respectivement non *majorée* de $\mathbb{R}$). On suppose que I n'est pas un *segment*, c'est-à-dire que $\alpha \notin I$ ou $\beta \notin I$. Pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) on notera indifféremment $\int_I f$ ou $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$: c'est une *intégrale généralisée*, qui n'a pas toujours un sens !

Fonctions positives Si $f : I \to \mathbb{R}^+$ est *continue* alors on définit $\int_I f \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ par

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x)}$$ où F est une *primitive* (nécessairement *croissante*) de f.

On dit que f est *intégrable* sur I si $\int_I f \in \mathbb{R}^+$, ce que l'on écrit aussi $\int_I f < +\infty$.

De façon équivalente, on a $\boxed{\displaystyle\int_I f = \sup\left\{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,;\ a\,,\ b \in I\,,\ a < b\right\}}$.

On a la *relation de Chasles* : pour tout $\gamma \in I$, $\boxed{\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\gamma f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\gamma^\beta f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Si J est un intervalle d'extrémités a et b, si $\varphi : J \to I$ est une *bijection strictement croissante* de *classe* $\mathscr{C}^1$,

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u}$$ (formule de *changement de variables*).

Si $f : I \to \mathbb{R}^+$ et $g : I \to \mathbb{R}^+$ sont continues,

- quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$;
- si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_I f \leq \int_I g$;
- on a l'*inégalité de Cauchy–Schwarz* : $\boxed{\displaystyle\int_I fg \leq \left(\int_I f^2\right)^{1/2} \left(\int_I g^2\right)^{1/2}}$.

Théorème de comparaison Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continues. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in [a, +\infty[$, $f(t) \leq Cg(t)$) (ce qui revient à demander $f = O(g)$: on lit «f égal grand O de g»).
Si g est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors f aussi.
(Si f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$ alors g non plus.)

Intégrales de Bertrand Soient des réels α, β, et $0 < a < 1 < b$.

La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}(\ln t)^{-\beta}\,\mathrm{d}t$ est intégrable sur $[b, +\infty[$ si et seulement si :
$\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}|\ln t|^{-\beta}\,\mathrm{d}t$ est intégrable sur $]0, a]$ si et seulement si :
$\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

Fonctions absolument intégrables Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue alors les fonctions suivantes le sont aussi : $|f| : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & |f(t)|, \end{array}$ $f^+ : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & \max(f(t),0), \end{array}$ $f^- : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & \max(-f(t),0). \end{array}$

On dit que f est *absolument intégrable* sur I si $\int_I |f| < +\infty$. Si c'est le cas, on définit $\boxed{\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-}$. On a $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$. De plus, si F est une primitive de f, elle admet des *limites finies* en α et β et $\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\nearrow\beta} F(x) - \lim_{x\searrow\alpha} F(x)}$.

• Si f et g sont absolument intégrables sur I alors pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est absolument intégrable et $\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$ (c'est la *linéarité* de l'intégrale).

• Si $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ est intégrable et $|f(t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $t \in I$ alors f est absolument intégrable et $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f| \leq \int_I \varphi$.

• Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I alors fg est absolument intégrable sur I et $\boxed{\int_I |fg| \leq \left(\int_I f^2\right)^{1/2} \left(\int_I g^2\right)^{1/2}}$ (*inégalité de Cauchy–Schwarz*).

Intégrales impropres Pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue, on dit que l'*intégrale impropre* $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* si les primitives de f admettent des limites <u>finies</u> en α et β. Si c'est le cas, on pose $\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\nearrow\beta} F(x) - \lim_{x\searrow\alpha} F(x) =: [F]_\alpha^\beta}$ où F est une primitive de f.

Si f est absolument intégrable sur I on dit que l'intégrale $\int_I f$ est *absolument convergente*. Les intégrales convergentes mais non absolument convergentes sont dites *semi-convergentes*.

• Si I est borné et si f est *bornée* sur I alors l'intégrale impropre $\int_I f$ converge (conséquence du *critère de Cauchy*).

• Si $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $c \in]\alpha, \beta[$ alors $\int_\alpha^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et $\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^\beta f(t)\,\mathrm{d}t}$ (*relation de Chasles*).

• Si $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si $\varphi : J \to I$ est une bijection strictement croissante, de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle J d'extrémités a et b, alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u$ converge et $\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\mathrm{d}u}$ (formule de *changement de variables*).

• Si u, $v : I \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, si $\int_\alpha^\beta u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si uv admet des limites finies en α et β alors $\int_\alpha^\beta u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\int_\alpha^\beta u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t + [uv]_\alpha^\beta}$ (formule d'*intégration par parties*).

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

Théorème de comparaison Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$, $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ continues.

- Supposons que $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$:
  - si $f = O(g)$ en b alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ quand $x \to b$.
  - si $f = o(g)$ en b alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ quand $x \to b$.
  - si $f \sim g$ en b et f est à valeurs positives alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ quand $x \to b$.
- Supposons au contraire que $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$:
  - si $f = O(g)$ en b alors $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ quand $x \to b$.
  - si $f = o(g)$ en b alors $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ quand $x \to b$.
  - si $f \sim g$ en b et f est à valeurs positives alors $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$ quand $x \to b$.