Exercice 193

Sur quel intervalle étudier les courbes suivantes ? (On se préoccupera des périodicités du paramétrage, ou des symétries de la courbe)

a) $\begin{cases} x(t) = & \sin t \\ y(t) = & \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = t^5 - t^3 \\ y(t) = \dfrac{1}{t^2+1} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(t) = (t-4)^5 - (t-4)^3 \\ y(t) = \dfrac{1}{(t-4)^2+1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases}$ e) $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln|\sin t| \\ y(t) = \quad \sin t \cos t \end{cases}$ f) $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$

Exercice 194

Tracer la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = \sin t + \cos t \\ y(t) = \quad \sin^3 t \end{cases}$$

Exercice 195

Étudier les branches infinies des courbes suivantes :

a) $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln|\sin t| \\ y(t) = \quad \sin t \cos t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{t^2-2t} \\ y(t) = \dfrac{t^3-3}{t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{e^t}{t+1} \\ y(t) = \dfrac{te^t}{t+1} \end{cases}$

Exercice 196

Préciser les tangentes au point limite à l'infini des courbes :

a) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{e^t}{t+1} \\ y(t) = \dfrac{te^t}{t+1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

Exercice 197

Préciser les points doubles des courbes :

a) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t^2+t-2} \\ y(t) = \dfrac{t^2-2t}{t-1} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{t^2-2t} \\ y(t) = \dfrac{t^3-3}{t} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) = 2t + t^2 \end{cases}$

Exercice 198

Tracer la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t^2+t-2} \\ y(t) = \dfrac{t^2-2t}{t-1} \end{cases}$$

Exercice 199

Préciser les tangentes au point 0 pour les questions a) à d), aux points singuliers pour les questions e) et f), et l'allure au voisinage de ces points, pour les courbes :

a) $\begin{cases} x(t) = t + 2t^2 - t^3 \\ y(t) = t + 2t^2 - t^7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = -t + t^2 \\ y(t) = t^2 + t^3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(t) = -t^2 - 2t^3 \\ y(t) = -t^3 - t^5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x(t) = \quad t^2 + 3t^3 + t^4 \\ y(t) = -2t^2 - 6t^3 + t^4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$ f) $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln|\sin t| \\ y(t) = \quad \sin t \cos t \end{cases}$

Exercice 200
Déterminer les points d'inflexion de la courbe :
$$\begin{cases} x(t) = (t-2)^3 \\ y(t) = \ t^2 - 4 \end{cases}$$

Exercice 201
Tracer les courbes :

a) $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \dfrac{\cos^2 t}{2-\cos t} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$ f) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{4(1-2t)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$

Au d) on étudiera les points d'inflexion ; au e) on étudiera les points doubles et on s'intéressera aux points d'intersection de la courbe avec ses asymptotes.

Exercice 202
Montrer que l'image de la courbe :
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$
est exactement l'ensemble des (x, y) de $\mathbf{R}^2$ vérifiant l'équation cartésienne :
$$x^3 + y^3 = 3xy.$$

Exercice 203
Donner une représentation paramétrique de l'hyperbole d'équation cartésienne :
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Exercice 204
On considère la courbe :
$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = a(t+1) \\ z(t) = \dfrac{at^2}{t^2-1} \end{cases}$$
Montrer que cette courbe est située dans un plan, puis la tracer.

Exercice 205
Tracer les courbes définies en polaires par :

1) $r = \sin\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)$.

2) $r = 1 - \tan(2\theta)$.

Matrices : exercices stupidement calculatoires

Exercice 206
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Parmi les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB lequels ont un sens ? Calculez les.

Exercice 207
Soit A la matrice carrée (réelle) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 208
A tout nombre réel t on associe la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

1) Soit t_1 et t_2 deux réels. Calculer le produit matriciel $M(t_1)M(t_2)$.

2) Soit t un réel. Montrer que $M(t)$ est inversible et fournir une expression très simple de $[M(t)]^{-1}$.

Exercice 209
Montrer que la matrice carrée A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible en calculant explicitement son inverse.

Exercice 210
Soit A la matrice carrée (réelle) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $B = A - I$.

1) Calculer B^n pour tout entier $n \geq 0$.

2) En déduire A^n pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 211
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbf{R}$, soit (e_1, e_2, e_3) une base de E et soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & -7e_1 - 6e_2 \\ f(e_2 & = & 8e_1 + 7e_2 \\ f(e_3) & = & 6e_1 + 6e_2 - e_3 \end{array}.$$

1) Décrire l'application linéaire $f \circ f$.

2) Montrer que f est bijective et décrire l'application linéaire f^{-1}.

Exercice 212

1) En fournissant une matrice équivalente échelonnée, déterminer le rang de chacune des matrices réelles suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

2) Quel est la dimension du sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $(-1, 7, 0)$, $(4, 2, 1)$ et $(3, 9, 1)$?

3) Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbf{R}^3$ défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} -x & +7y & & = & 0 \\ 4x & +2y & +z & = & 0 \\ 3x & +9y & +z & = & 0 \end{cases} \qquad ?$$

4) Et quelle est celle du sous-espace défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} -x & +4y & +3z & = & 0 \\ 7x & +2y & +9z & = & 0 \\ & y & +z & = & 0 \end{cases} \qquad ?$$

Espace vectoriel des matrices, manipulations abstraites

Exercice 213

Soit $n \geq 1$ un entier et $\mathbf{K}$ un corps commutatif ; on suppose en outre que dans $\mathbf{K}$, $1 + 1 \neq 0$. On considère les sous-espaces S_n et A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ composés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques.

1) Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et déterminer leurs dimensions respectives.

2) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est somme directe de S_n et A_n.

Exercice 214

Soit A une matrice (m, n). On suppose qu'il existe une matrice (n, m) B telle que $AB = I_m$ et $BA = I_n$. Montrer que $m = n$.

Exercice 215

Soit $n \geq 1$ et soit A et B deux matrices carrées (n, n). On suppose que la somme de chaque ligne de A et la somme de chaque ligne de B vaut 1. Montrer qu'il en est de même pour le produit AB.

Exercice 216

On notera E l'ensemble des matrices réelles $(3, 3)$ M qui ont la propriété suivante : les trois sommes de ses trois lignes de M, les trois sommes des trois colonnes de M et les deux sommes des deux diagonales de M sont toutes les huit égales.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

2) Constater que si $M \in E$, ${}^tM \in E$.

3) Déterminer les matrices symétriques qui sont aussi dans E.

4) Déterminer les matrices antisymétriques qui sont aussi dans E.

5) En utilisant les questions précédentes et la formule $M = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM) + \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$, déterminer la dimension de E.

Exercice 217
On dit qu'une matrice carrée M est nilpotente lorsqu'il existe un $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$ et qu'elle est racine de l'unité lorsqu'il existe un $k \geq 1$ tel que $M^k = I$.
Soit $n \geq 1$ un entier et A et B deux matrices carrées (n, n).

1) Montrer que si AB est nilpotente, BA l'est aussi.

2) Montrer que si AB est racine de l'unité, BA l'est aussi.

Identités matricielles et calculs de puissances ou d'inverses

Exercice 218
Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible en calculant son inverse A^{-1}.

2) En déduire la valeur de A^n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 219
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis A^3, puis A^n pour tout entier $n \geq 1$. Calculer l'inverse B de A, puis toutes les puissances B^n pour $n \geq 1$.
On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ de matrice A dans la base canonique. Soit $u = (x, y)$ un vecteur de $\mathbf{R}^2$ et $n \geq 1$; expliciter $\varphi^n(u)$ (où l'exposant signifie la composée de φ n fois).

Exercice 220
Soit A une matrice carrée. On suppose que A vérifie l'identité : $A^3 - 2A - I = 0$.
Montrer que A est inversible et donner une formule simple pour A^{-1}.

Exercice 221
Soit m un réel non nul ; on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $(A + I)(A - 2I)$.

2) Soit $B = \dfrac{1}{3}(A + I)$ et $C = \dfrac{1}{3}(A - 2I)$. Calculer B^2 et C^2. En déduire une expression simple de B^n et C^n (où $n \geq 1$ est un entier quelconque).

3) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C.$$

Exercice 222
Soit A la matrice carrée $(2, 2)$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que $A^2 = 2A + 15I$.

2) Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ qu'il existe des entiers a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.

3) Donner une expression simple de a_n et de b_n, valable pour tout $n \geq 1$.

Exercice 223
Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{250}.

Autour des changements de bases

Exercice 224
Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose $f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3$, $f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3$.

1) Vérifier que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E, et écrire la matrice de passage de la base $\underline{e}$ à la base $\underline{f}$.

2) Soit v de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{f}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{e}$?

3) Soit v de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{e}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{f}$?

4) Pour v vecteur de E, on notera $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{e}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{f}$.
Exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z.

Exercice 225
Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose $f_1 = e_1 - e_3$ et $f_2 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$.
Pour v vecteur de E, on notera $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{e}$.

1) Est-il possible de trouver un f_3 tel que si $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\underline{f}$ est une base de E dans laquelle, pour tout vecteur v de E, la troisième coordonnée de v soit $z' = z$?

2) Même question avec $z' = x - y + z$.

3) Quand la réponse est "oui", déterminer tous les f_3 qui conviennent.

Exercice 226
Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrices à coefficients réels.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, de dimension 3, et soit (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) deux bases de E ; soit F un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension 1 et f_1 un vecteur non nul de F.
On suppose que la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) est la matrice P.

1) Calculer la matrice P^{-1}.

2) Soit u l'application linéaire de E vers F dont la matrice est A dans les bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1). Déterminer la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et $(5f_1)$.

Exercice 227
Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit u l'endomorphisme dont la matrice dans $\underline{e}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$ et $f_3 = e_1 - e_3$.

1) Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.

2) Calculer la matrice de u dans $\underline{f}$.

3) Calculer A^{100}.

Exercice 228
Dans $E = \mathbf{R}^3$, on note $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans $\underline{e}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver un vecteur f_1 non nul tel que $u(f_1) = -2f_1$.
puis un vecteur f_2 non nul tel que $u(f_2) = 4f_2$.

2) Trouver une base f_3 de $\operatorname{Ker} u$.

3) Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$, et écrire la matrice de passage de $\underline{e}$ à $\underline{f}$.

4) Calculer A^{100}.

Exercice 229
Soit u l'endomorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2i & -2i & 1 \\ 2(1+i) & 1+2i & -1+i \\ 1+2i & 1+i & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $e'_1 = e_1 - e_2$, $e'_2 = -ie_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2 + ie_3$.

1) Montrer que la famille $\underline{e}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbf{C}^3$.

2) Ecrire la matrice de passage P de $\underline{e}$ à $\underline{e}'$ et calculer son inverse.

3) Déterminer la matrice B de u dans la base $\underline{e}'$.

4) Montrer que la matrice B est inversible, et calculer B^{-1}. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

5) Calculer B^2. Que peut-on en déduire pour A^2 ?

Exercice 230
Dans cet exercice, on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{C}^3$ (en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$).
Soit V l'ensemble des matrices de la forme :

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

avec a, b, c complexes.

1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,3}$ des matrices carrées $(3,3)$ à coefficients complexes.

2) On pose $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 + je_2 + j^2e_3$ et $e'_3 = e_1 + j^2e_2 + je_3$. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbf{C}^3$. Expliciter la matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (e'_1, e'_2, e'_3).

Dans les questions suivantes, on notera P la matrice de passage qu'on vient de calculer.

3) On note Q la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit PQ ; en déduire une expression explicite de la matrice P^{-1}.

4) On pose $A = M_{0,1,0}$, et on note u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = M_{0,1,0}$. Calculer les vecteurs $u(e'_1)$, $u(e'_2)$ et $u(e'_3)$ en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3.

5) Expliciter la matrice $P^{-1}AP$.

6) Calculer A^n pour n entier $(n \geq 1)$.