Exercice 172
Soit A et B deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$. On suppose que B divise A.
Montrer que B^2 divise $A'B - AB'$.

Exercice 173
Soit $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers ; on pose $d = \mathrm{PGCD}(m, n)$.

1) Montrer qu'il existe u, v entiers positifs tels que $|um - vn| = d$.
Dans la suite de l'exercice, on notera $\alpha = \mathrm{Max}(um, vn)$ et $\beta = \mathrm{Min}(um, vn)$.

2) a) Montrer dans $\mathbf{C}[X]$ l'identité :

$$(X^\alpha - 1) - (X^\beta - 1) = X^\beta(X^d - 1)$$

b) Montrer que pour tous entiers k, $l \geq 1$, si k divise l alors $X^k - 1$ divise $X^l - 1$.

c) Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ qui divise à la fois $X^m - 1$ et $X^n - 1$. Montrer que P divise $X^d - 1$.

d) En déduire que $X^d - 1$ est le PGCD de $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

3) Soit A, B deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ et soit D le PGCD de A et B.

a) Montrer que pour tout polynôme unitaire $C \in \mathbf{C}[X]$, CD est le PGCD de AC et de BC.

b) Soit p, $q \geq 1$; déterminer le PGCD de $X^p + X^{p-1} + \cdots + X + 1$ et de $X^q + X^{q-1} + \cdots + X + 1$.

Exercice 174
Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré 5 tels que $P + 10$ soit divisible par $(X + 2)^3$ et $P - 10$ par $(X - 2)^3$.

Exercice 175
Le but de l'exercice est de trouver tous les polynômes de $\mathbf{R}[X]$ qui vérifient l'identité :

$$(X + 3)P(X) = XP(X + 1) \qquad (*).$$

1) Soit P un polynôme qui vérifie $(*)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P = XQ$.

2) Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.

3) En déduire que P est de la forme $aX(X + 1)(X + 2)$ pour un $a \in \mathbf{R}$.

4) Etudier la réciproque.

Exercice 176
Soit $n \geq 1$. Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme :

$$P_n = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)}{n!}.$$

Exercice 177
1) Soit p_1, p_2, p_3 et p_4 quatre entiers. Trouver deux entiers q_1 et q_2 tels que $(p_1^2 + p_2^2)(p_3^2 + p_4^2) = q_1^2 + q_2^2$. (On pourra manipuler les nombres complexes $p_1 + ip_2$ et $p_3 + ip_4$).

2) Soit P_1, P_2, P_3 et P_4 quatre polynômes de $\mathbf{R}[X]$. En s'inspirant de la qeustion précédente, trouver deux polynômes réels Q_1 et Q_2 tels que $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$.

3) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer l'équivalence :

$$(\forall x \in \mathbf{R},\ P(x) \geq 0) \iff (\exists Q_1,\ Q_2 \in \mathbf{R}[X] \text{ tels que } P = Q_1^2 + Q_2^2).$$

Exercice 178
Sachant que le polynôme $X^4 + 12X - 5$ possède deux racines réelles dont la somme est 2, le factoriser.

Exercice 179
On note $A = X^3 - 1$ et $B = X^2 + 1$. Expliciter une relation de Bézout entre A et B, puis toutes les relations de Bézout entre A et B. Trouver un polynôme P dont le reste de la division par A soit $X + 1$ et celui de la division par B soit $X - 1$.

Formules de Taylor

Exercice 180
Soit x un réel strictement positif. Montrer que :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 181
Soit x un réel tel que $0 < x < 1$. Montrer l'inégalité : $\operatorname{ch} x < 1 + x^2$.

Exercice 182
Soit a un réel strictement positif.

1) Écrire la formule de Taylor pour la fonction cosinus, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5. Montrer que :

$$\left| \cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$

2) En déduire que :

$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos \frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Exercice 183
Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités :

$$0 < (1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} < \frac{5x^3}{81}.$$

Exercice 184
1) Écrire la formule de Taylor pour le logarithme népérien sur l'intervalle $[1, 2]$ avec le reste à l'ordre 3. En déduire que $\dfrac{1}{2} < \ln 2$.

2) Écrire la formule de Taylor pour l'exponentielle sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, avec le reste à l'ordre 4. En déduire, à l'aide de la question précédente que :

$$\frac{79}{48} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{1}{192}.$$

Exercice 185
1) Appliquer la formule de Taylor à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ entre 25 et 26 et avec un reste à l'ordre 2.
2) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{26}$.

Exercice 186
Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et soit M une constante positive. On suppose que pour tout t réel, $|\varphi''(t)| \leq M$.
Montrer que pour tous s, t de $\mathbf{R}$, on a :

$$\varphi(t) + s\varphi'(t) + \frac{s^2}{2} M \geq 0.$$

En déduire que pour tout t réel, on a :

$$|\varphi'(t)| \leq \sqrt{2M}\sqrt{\varphi(t)}.$$

Exercice 187

Soit f de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ une application continue. On suppose que $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
On suppose en outre que f est dérivable en 0 et en 1 et que $f'(0)=f'(1)=0$.

1) On désigne par g l'application de $]0,1[$ dans $\mathbf{R}$ définie pour tout x de $]0,1[$ par :

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{f(x)-1}{x-1}.$$

a) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)$. (On justifiera l'existence de ces limites).

b) On prolonge alors g à $[0,1]$ en posant :

$$g(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) \quad \text{et} \quad g(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x).$$

Montrer que g est alors continue sur $[0,1]$ et en déduire, par le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un α dans $]0,1[$ tel que :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}.$$

c) Montrer que $f(\alpha)=\alpha$.

2) On suppose désormais que f est deux fois dérivable sur $[0,1]$.
Soit $\alpha\in]0,1[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.

a) On suppose ici que $\alpha\le\frac{1}{2}$.
Écrire la formule de Taylor pour f sur l'intervalle $[0,\alpha]$ et en déduire l'existence d'un c dans $]0,\alpha[$ tel que $f''(c)\ge 4$.

b) On suppose ici que $\alpha>\frac{1}{2}$.
À l'aide d'une méthode analogue, montrer cette fois l'existence d'un d dans $]\alpha,1[$ tel que $f''(d)\le -4$.

c) En conclure qu'il existe un β dans $]0,1[$ tel que $|f''(\beta)|\ge 4$.

Exercice 188

1) Soit $x\in]0,\frac{\pi}{2}]$.
Montrer qu'il existe un unique $\theta_x\in]0,1[$ pour lequel :

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}\cos(\theta_x x).$$

2) En écrivant par ailleurs la formule de Taylor-Lagrange avec reste à l'ordre 5 pour sin entre 0 et x, montrer que θ_x admet une limite quand x tend vers 0^+ et préciser cette limite.

Exercice 189

Soit f une fonction trois fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$. On suppose sa dérivée troisième bornée par en valeur absolue par une constante M.

1) Dans cette question on suppose f de classe $\mathcal{C}^3$.

a) En effectuant deux intégrations par partie successives, intelligemment choisies, montrer la formule :

$$f(b)-f(a)=\frac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b f'''(t)(t-a)(t-b)\,dt.$$

b) Majorez de votre mieux l'intégrale qui fait office de terme d'erreur dans la formule qui précède.

2) Dans cette question on ne suppose pas f''' continue.
On pose :

$$C = \frac{f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}[f'(a) + f'(b)]}{(b-a)^3}$$

puis :

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) + \frac{x-b}{2}[f'(x) + f'(b)] + C(x-b)^3.$$

a) Justifier l'existence d'un $\alpha \in]a, b[$ tel que $\varphi'(\alpha) = 0$.

b) Justifier la possibilité d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f' avec reste à l'ordre 2 sur l'intervalle $[\alpha, a]$.

c) En écrivant cette formule de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe un $c \in]a, b[$ pour lequel :

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(a) + f'(b)}{2}(b-a) - \frac{(b-a)^3}{12} f'''(c).$$

d) Majorer le terme final de la formule.

3) Quelle section du cours vient-on de réviser ?

Exercice 190

On fixe un réel a, non entier, et on note $f(x) = (1-x)^a$.
Pour un x fixé strictement entre 0 et 1, on pose :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n.$$

1) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, essayer de prouver que R_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et échouer.

2) Réessayer avec la formule de Taylor à reste intégral, et cette fois réussir.

Fractions rationnelles

Exercice 191

Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}[X]$.

a) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ b) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ c) $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$ d) $\dfrac{4}{(X^2-1)^2}$

e) $\dfrac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)}$ f) $\dfrac{1}{X^n(X-1)}$ g) $\dfrac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$ h) $\dfrac{16807}{(X-1)^5(X^2+2X+4)}$

Exercice 192

Soit P un polynôme complexe de degré n ayant n racines complexes distinctes notées $x_1, \ldots, x_n$.
On note a un complexe distinct de toutes les racines de P.

1) En utilisant des fractions rationnelles, montrer les formules :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - a} = -\frac{P'(a)}{P(a)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x_k-a)^2} = \frac{(P'(a))^2 - P(a)P''(a)}{(P(a))^2}.$$

2) On suppose que toutes les racines de P sont réelles. Montrer que $(P')^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.